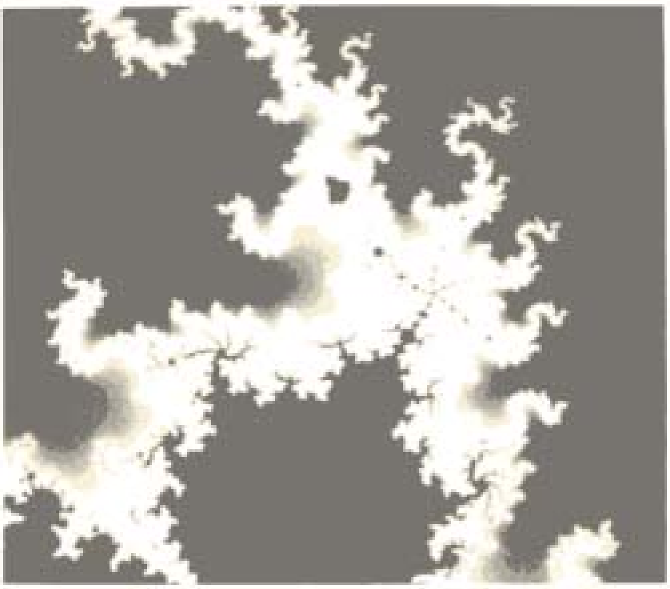
Una introducción a los sistemas dinámicos

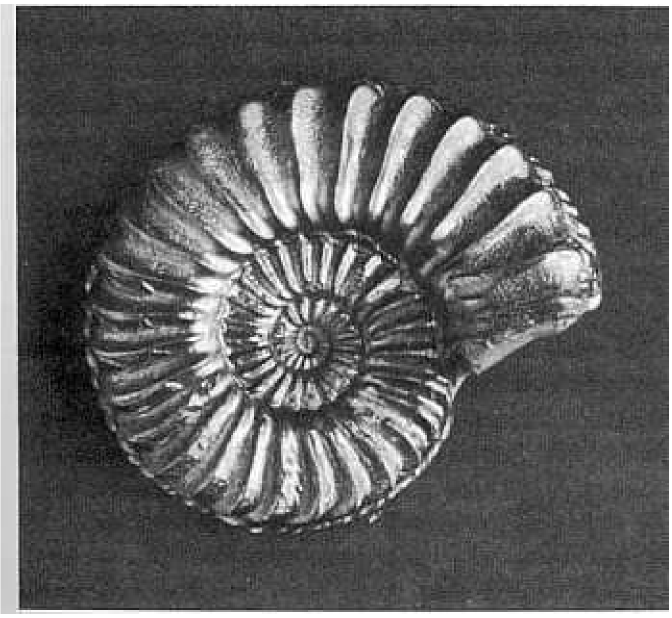


JOSÉ SEADI

"El porvenir es tan irrevocable como el rígido ayer. No hay una cosa que no sea una letra silenciosa de la eterna escritura indescifrable cuyo libro es el tiempo..."
Jorge Luis Borges, *Libro de las Mutaciones*

En palabras más técnicas y menos poéticas, lo que estos versos nos dicen es que el mundo en que vivimos es en sí mismo un sistema dinámico. La dificultad para comprenderlo estriba en nuestro reducido entendimiento de las leyes que lo rigen.

Los sistemas dinámicos son un área "joven" de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios sobre mecánica celeste, y a H. Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 30 años que los sistemas dinámicos se establecieron como una área propiamente dicha, gracias al trabajo de matemáticos destacados como S. Smale, Sinai, Lyapunov, A. Douady, M. Herman, D. Sullivan, V.I. Arnold y muchos más.



Actualmente hay una "explosión" de esta área de estudio a nivel mundial, en muchos contextos diferentes. Una característica fascinante de los sistemas dinámicos, es la profunda interacción que tienen con otras áreas de las matemáticas y del conocimiento, como la física, la química, la biología y la economía. De hecho, los sistemas dinámicos juegan ya un papel importante inclusive en el arte, a través de los maravillosos conjuntos fractales que aparecen en el estudio de la dinámica de ciertas funciones del plano complejo: los conocidos conjuntos de Julia y de Mandelbrot.

Tratando de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podemos decir burdamente que es el estudio de fenómenos deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependen de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Si queremos ser formales, podemos decir que un sistema dinámico es una familia infinita de funciones (homeomorfismos locales) de un espacio (métrico) en sí mismo, cerrada bajo composiciones, siempre que éstas tengan sentido.

Daré algunos ejemplos que espero ayuden a precisar la definición de sistemas dinámicos y la manera en que estos nos ayudan a entender el mundo que nos rodea.

EJEMPLO 1. Supongamos que, extrañamente, nos encontramos en una "crisis económica" y algún banco ofrece prestarnos dinero. La tasa de interés que cobra el banco es de 2% mensual, y nuestra capacidad real de pago es de dos mil nuevos pesos mensuales máximo. ¿Cuánto dinero queremos que nos preste el banco? Ingenuamente podríamos responder "pues todo lo que se pueda", pero vamos a analizar este sencillo ejemplo un poco más detenidamente. Denotemos por A_0 la cantidad de dinero que le queremos pedir prestado al banco, y por A_n nuestra deuda después de n meses. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + 0.02\ A_0 - 2000 \\
&= (1.02)\ A_0 - 2000, \\
A_2 &= (1.02)\ A_1 - 2000 \\
&= (1.02)^2\ A_0 - 2000\ (1.02) - 2000,
\end{aligned}
$$

$$A_n = (1.02)^n A_0 - 2000\ (1.02^{n-1} + \quad + 1.02 + 1).$$

Observemos que si A_0, el préstamo inicial es de \$100 mil nuevos pesos entonces

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (1.02) \cdot 100{,}000 - 2000 = A_0, \\
A_2 &= (1.02) \cdot 100{,}000 - 2000 = A_0,
\end{aligned}
$$

etc., es decir que A_0 = \$ 100 000.00 es un punto fijo, o punto de equilibrio, del sistema dinámico en cuestión. Podemos entonces concluir:

a) Si el banco nos presta menos de \$ 100 000.00, algún día terminaremos de pagarle.

b) Si el banco nos presta más de \$ 100 000.00, algún día tendremos que venderle el alma al diablo, o hacer algo para poder pagar.

c) Si el banco nos presta exactamente \$ 100 000.00, simplemente le pagaremos 2 mil pesos mensuales de interés por el resto de nuestra existencia.

Así que conocer las leyes que rigen al sistema, nos permite predecir el futuro. Ustedes tienen la palabra: ¿cuánto quieren que les preste el banco?

Expresiones del tipo presentado, donde tenemos una sucesión de valores $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, tales que el valor A_n está determinado por los valores anteriores A_{n-1}, A_{n-2}, etc., se llaman *ecuaciones en diferencias*, y dan ejemplos de sistemas dinámicos discretos, donde la palabra discreto significa que el parámetro "tiempo" lo consideramos así: cada mes, cada año, cada hora, etc. Las ecuaciones en diferencias, o sistemas dinámicos discretos, más "sencillos" y tal vez más importantes, surgen mediante la iteración de funciones. Regresaremos a este tema al final del artículo.

EJEMPLO 2. Se sabe que ciertas especies animales se multiplican, en condiciones ideales (comida en abundancia, sin luchas internas, etc.), de manera tal que el crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de miembros de la especie(1). Es decir que si P(t) denota la población en el tiempo t, y P'(t) es la velocidad con que varía la población, entonces existe una constante a > 0 tal que

$$\text{(I)} \qquad P'(t) = aP(t),$$

para todo t > 0, donde 0 denota el tiempo a partir del cual comenzamos a hacer nuestra observación, y la constante *a* depende de la población en cuestión y del medio ambiente. Esta ecuación es el ejemplo más sencillo e importante de lo que es una ecuación diferencial. Es fácil ver que cualquier función que satisface la ecuación diferencial (I) necesariamente es de la forma

$$\text{(II)} \qquad Y(t) = Ke^{at}$$

donde K es una constante, determinada por "la condición inicial". En nuestro caso K es la población inicial en t = 0. La ley de crecimiento de población dada por la ecuación (I) se conoce como Ley Malthusiana de crecimiento, y la ecuación (II) nos dice que si la especie en cuestión se rige por esta ley de crecimiento, entonces, independientemente de la población inicial, si P(0) > 0, la población tenderá a infinito exponencialente. La experiencia nos enseña que esto no sucede en la realidad por tiempo prolongado, así que debe haber otros factores a considerar. Una vez que la población sobrepasa un cierto número, comienza a haber escasez de alimentos, se producen luchas internas, desechos contaminantes, etc. Esto nos lleva a considerar la "Ley logística" de crecimiento de poblaciones:

$$P'(t) = aP(t) - bP^2(t),$$

donde *a*, *b* son constantes positivas y *a* es mucho mayor que *b*. Las constantes *a* y *b* son los *coeficientes vitales* de la especie. Obsérvese que si la población P(t) es "pequeña", el término $bP^2(t)$ es despreciable, pues *b* es muy pequeña en relación a *a*, por lo que el crecimiento asemeja al regido por la ley malthusiana. Sin embargo, al aumentar P(t), la contribución bP^2 crece en forma cuadrática, por lo que juega un papel importante.

Esta ecuación diferencial es de primer orden, del tipo "separable" y por tanto fácil de resolver; si P(0) es la población inicial en t = 0, entonces (por el teorema de existencia de unicidad de soluciones con condiciones iniciales) existe una única función de t que satisface la ecuación diferencial y toma el valor P(0) en t = 0. La solución buscada es:

$$P(t) = \frac{aP(0)}{bP(0) + (a - bP(0))e^{-}}$$

Si hacemos $L = a/b$, observamos que P(t) tiende a L cuando t tiende a ∞, independientemente de la población inicial, pues e^{-at} tiende a 0 cuando t tiende a infinito. Además, P(t) es una función monótona creciente para t > 0. Más aún, dado que

$$P''(t) = aP'(t) - 2bP(t) \cdot P'(t),$$

se ve que P' es creciente para P(t) < L/2 y es decreciente para

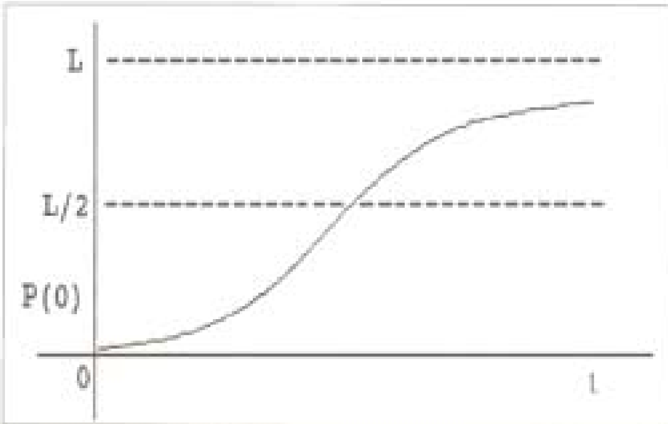


Figura 1

$P(t) > L/2$, con un punto de inflexión en $P(t) = L/2$. Por tanto la gráfica de P es del tipo: (ver figura 1)

A partir de esta información concluimos que el periodo de tiempo antes de que la población alcance la mitad de su límite L, es un periodo de crecimiento acelerado, semejante al crecimiento regido por la ley malthusiana. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero.

De esta forma la ley logística nos permite hacer predicciones sobre el crecimiento de las especies, predicciones que se han comprobado en diversos estudios y experimentos. Por ejemplo, en 1920 los científicos norteamericanos Pearl y Reed publicaron un artículo con predicciones sobre el crecimiento de la población (humana) en los Estados Unidos de Norteamérica. Para ello estudiaron el crecimiento de dicha población desde 1790, y así estimaron los coeficientes vitales *a* y *b* como: $a = 0.03134$ y $b = (1.5887)10^{-10}$. Considerando que la población de los E.U. en 1920 era de 105 711 000 habitantes, la ley logística de crecimiento indicaba que para 1950, la población sería de 149 053 000, y la población real era de 150 697 000, lo cual representa un error de 1.1%, que ¡no está mal!

Obsérvese que la ley logística

$$P'(t) = aP(t) - b^2P(t),$$

puede escribirse en la forma

$$P'(t) = aP(t)\left(\frac{L - P}{L}\right),$$

donde $L = a/b$ es el límite de la población. El término $aP(t)$ es el *potencial biótico* de la especie, es decir, la tasa potencial de crecimiento en condiciones ideales, y el término $(L - P)/L$ es la *resistencia ambiental* al crecimiento.

Ahora bien, supongamos que tenemos dos especies P_1 y P_2, cuyo crecimiento se rige por la ley logística cuando las especies están aisladas de otras. ¿Qué sucede si ahora juntamos a las especies P_1 y P_2, de manera tal que tienen que competir entre sí por el alimento, espacio, etc.? En este caso las ecuaciones se transforman en:

$$P_1' = a_1P_1(t)\left(\frac{L_1 - P_1(t) - \alpha_2P_2(t)}{L_1}\right)$$

$$P_2' = a_2P_2(t)\left(\frac{L_2 - P_2(t) - \alpha_1P_1(t)}{L_2}\right)$$

donde α_1 y α_2 son constantes que indican el grado de influencia de una especie en la otra. Nos interesan preguntas como las siguientes:

1. ¿Existen constantes c_1, c_2 tales que $P_1(t) \equiv c_1$ y $P_2(t) \equiv c_2$ satisfacen el sistema de ecuaciones anterior? Si tales valores existen, se les llama puntos de equilibrio del sistema. Obsérvese que y constantes equivalen a pedir que P_1 y P_2 sea 0, y significa que las dos especies puedan coexistir permanentemente.

2. Supongamos que (c_1, c_2) es un punto de equilibrio del sistema, y súbitamente agregamos algunos miembros de la primera especie, ¿permanecerán P_1 y P_2 cerca del valor (c_1, c_2) para todo tiempo futuro? Puede suceder, por ejemplo, que los miembros adicionales de la primera especie le den a ésta una ventaja tal sobre la segunda especie, de manera que ésta tiende a la extinción mientras que P_1 tiende a un valor límite L_1. Si esto sucede, decimos que el punto (c_1, c_2) es inestable, mientras que si P_1 y P_2 permanecen cerca de (c_1, c_2) para todo tiempo futuro, decimos que este es un punto de equilibrio estable. Más aún, puede suceder que si agregamos algunos miembros de cualquiera de las dos especies, al pasar el tiempo las poblaciones P_1 y P_2 tienden otra vez a la solución de equilibrio (c_1, c_2). En este caso se dice que (c_1, c_2) es un atractor.

3. Supongamos que P_1 y P_2 tienen valores arbitrarios para t igual a 0. ¿Qué ocurre cuando el tiempo tiende a infinito? ¿Triunfará alguna de las dos especies, tenderán a una solución de equilibrio?

Si en vez de dos especies en competencia, consideramos tres especies, o n especies en competencia, lo que obtendremos es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$P_1'(t) = f_1(P_1, P_2, \ldots, P_n, t),$$

$$P_2'(t) = f_2(P_1, P_2, \ldots, P_n, t),$$

$$P_n'(t) = f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n, t),$$

donde $f_1, \ldots, f_n$ son funciones de $P_1(t), \ldots, P_n(t)$, t. Esto es lo que se conoce como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden en $P_1,..., P_n$. A un conjunto de funciones que satisfacen este sistema, se le llama una solución. Parte fundamental de estos sistemas dinámicos es el estudio de las propiedades cualitativas de las soluciones, donde por propiedades cualitativas entendemos propiedades del tipo de las mencionadas en las preguntas 1-3.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t),..., x_n(t), t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1(t),..., x_n(t), t), \end{aligned}$$

una solución del sistema es una n-ada $(\phi_1,...,\phi_n)$ de funciones de t que satisfacen el sistema. Es decir que $\phi = (\phi_1,...,\phi_n)$ satisface:

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) &= f_1(\phi_1(t),..., \phi_n(t), t) \\ &\vdots \\ \phi_n'(t) &= f_n(\phi_1(t),..., \phi_n(t), t), \end{aligned}$$

Por ejemplo la pareja

$$(e^{2t} + e^{-3t}, 2e^{2t} - 3e^{-3t}),$$

es una solución del sistema lineal,

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = 6x_1 - x_2$$

ya que,

$$\frac{d(e^{2t} + e^{-3t})}{dt} = 2e^{2t} - 3e^{-3t},$$

y,

$$\frac{d(2e^{2t} - 3e^{-3t})}{dt} = 4e^{2t} + 9e^{-3t} = 6(e^{2t} + e^{-3t}) - (2e^{2t} - 3e^{-3t}).$$

Obsérvese que para cada t, la n-ada $(\phi_1(t),...,\phi_n(t))$ es un punto en $\Re^n$. Así, al variar el tiempo, la solución $(\phi_1,...,\phi_n)$ describe una curva, o trayectoria, en $\Re^n$. En este caso a $\Re^n$ se le llama el *espacio fase*, y la curva que describe la solución en $\Re^n$ se llama una *órbita* del sistema. Las soluciones de equilibrio corresponden al caso donde las derivadas $x_1',... x_n'$ son cero para todo t, así que la órbita consiste de solamente el punto en el equilibrio. El teorema fundamental de ecuaciones diferenciales es el teorema de existencia y unicidad de soluciones, el cual nos dice que si las funciones $f_1,...f_n$ son funciones diferenciables de clase c^1, entonces:

a) Las órbitas son curvas simples, es decir, sin auto-intersecciones,

b) Las órbitas son ajenas dos a dos: si dos órbitas se intersectan en un un punto entonces son idénticas. Por cada punto del espacio fase pasa una y solo una órbita del sistema.

c) las órbitas llenan todo el espacio $\Re^n$.

Luego, dado un sistema de ecuaciones como el anterior, sus órbitas descomponen al espacio fase en unión ajena de curvas simples y puntos de equilibrio. A esta descomposición de $\Re^n$ se le llama el retrato fase del sistema dinámico. Nos preguntamos cuestiones como: ¿Existen puntos de equilibrio? ¿Cuántos hay? ¿Existen órbitas periódicas? ¿Cuántas?

(Estas son soluciones del sistema tales que existen t_0 y $T > 0$, satisfaciendo $\Phi(t_0) = \Phi(t_0 + T)$, donde $\Phi = (\phi_1,...,\phi_n)$) ¿Son estables las soluciones?, es decir que si $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ son soluciones tales que para un cierto tiempo t_0 los puntos $\Phi(t_0)$ y $\Psi(t_0)$ están "muy cercanos", entonces $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ están "muy cercanos" para todo t;

¿Cuáles son los conjuntos límite de estas órbitas?, o en otras palabras ¿dónde se acumulan o dónde nacen y dónde mueren las órbitas?, etc.

El estudio de éstas y otras preguntas relacionadas, constituye el tema central de los sistemas dinámicos.

EJEMPLO 3. Considérese el sistema de ecuaciones en $\Re^2$ defindo por:

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = k \cdot x_2$$

con k constante. Cualquier solución de este sistema es de la forma

$$x = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{kt} \end{pmatrix}.$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Hay 5 casos cualitativamente distintos, dependiendo de k:

Caso 1: $k > 1$.
Caso 2: $k = 1$.
Caso 3: $1 > k > 0$.
Caso 4: $k = 0$.
Caso 5: $k < 0$

En todos los casos, el origen $0 \in \Re^2$ es punto de equilibrio del sistema, si $k \neq 0$, este es el único punto de equilibrio, pero si $k = 0$, todos los puntos en el eje "y" son puntos de equilibrio. En los otros casos, hay 5 órbitas especiales: el punto de equilibrio 0, y los 4 semi-ejes $(x > 0, y = 0)$, $(x < 0, y = 0)$, $(x = 0, y > 0)$ y $(x = 0, y < 0)$. Los retratos fase son en cada caso, como se indica en la figura 2.

En todos los casos, las órbitas que no son puntos fijos tien-

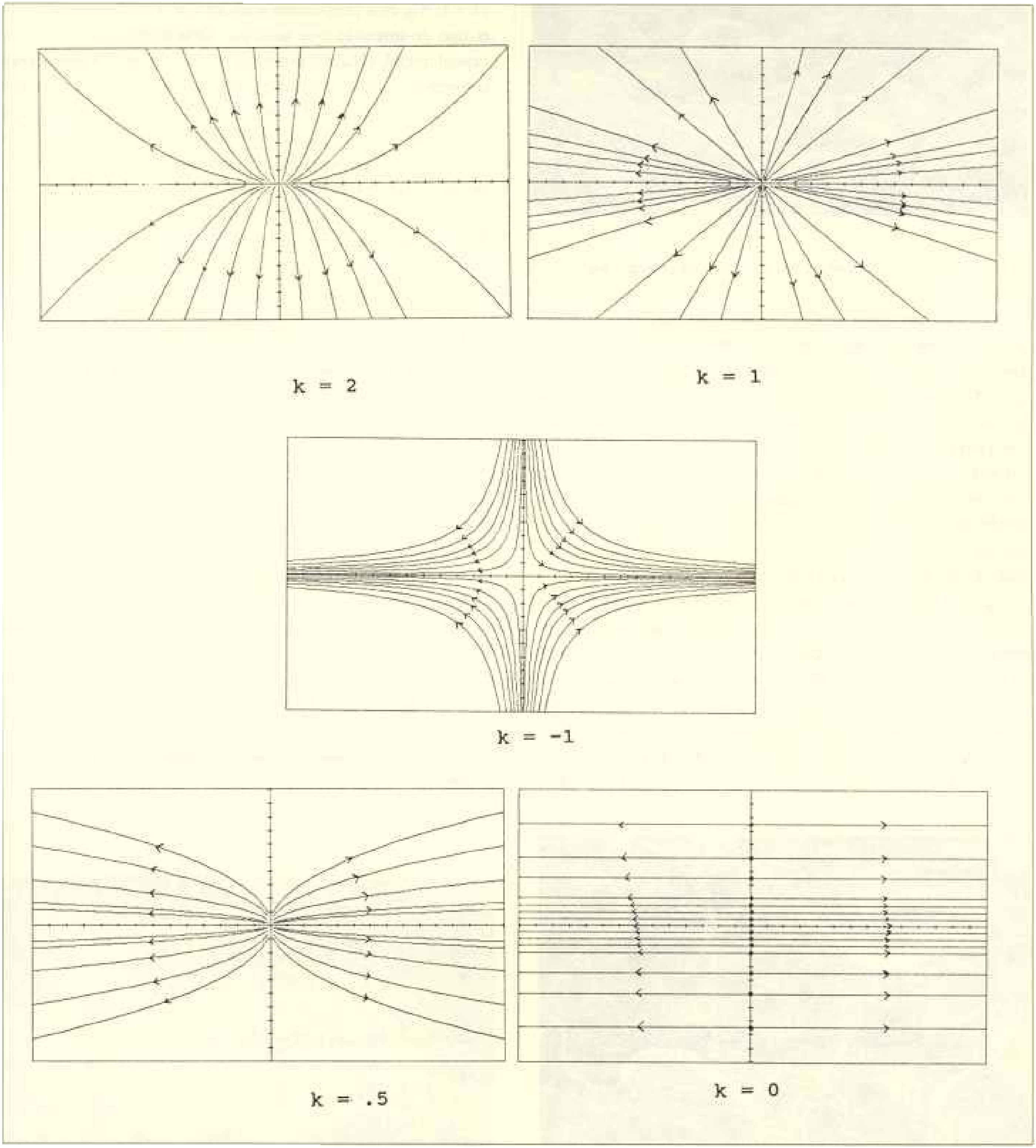
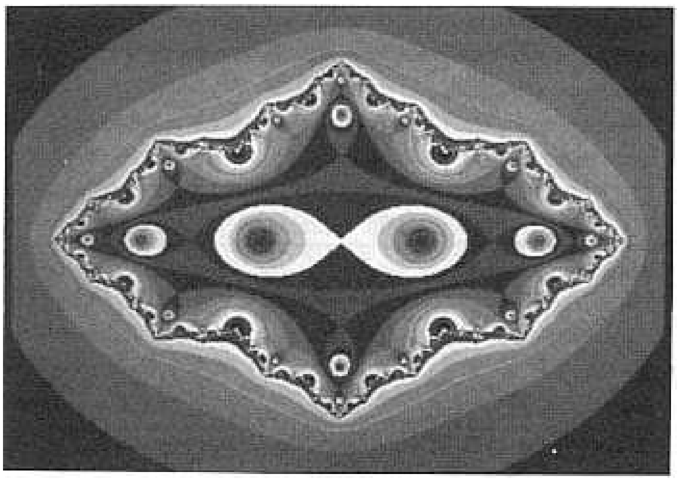


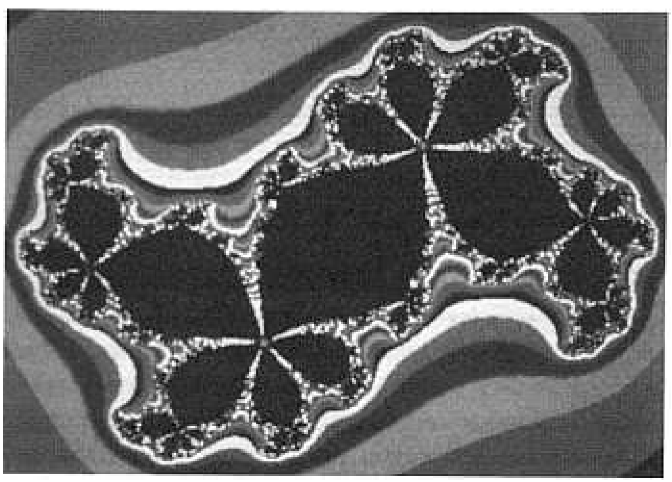
Figura 2



den a infinito. En los casos, 1, 2, 3 y 5, todas las órbitas nacen en el origen.

También podemos considerar sistemas dinámicos que dependen de un parámetro discreto, como es el caso de las ecuaciones en diferencias, mencionadas anteriormente. Aquí también podemos hablar de puntos de equilibrio, órbitas periódicas, atractores, repulsores, etc. Si en una ecuación en diferencias, hacemos que nuestro intervalo de tiempo sea menor, por ejemplo en lugar de "cada mes" consideramos cada semana, o cada día, o cada hora, etc., nuestra ecuación en diferencias se va transformando hasta que, cuando la longitud de los intervalos, tiende a cero, lo que nos queda en el límite, si este existe, es una ecuación diferencial.

EJEMPLO 4. Supongamos que ya superamos nuestra "crisis económica" del ejemplo 1, y queremos abrir una cuenta de inversión en el banco. Nuestra inversión inicial es de C_0 pesos, y el banco paga, por decir algo, el 10% de interés anual, que se reinvierte en nuestra cuenta anualmente. Nos preguntamos cuánto tendremos después de n años. Para responder a esta pregunta, denotamos por $C(n)$ nuestro capital después de n años, así que $C(0) = C_0$. Después de un año tendremos $C(1) = C_0 + (0.1)C_0 = (1.1)C_0$. Al segundo año tendremos $C(2) = C(1) + (0.1)C(1) = (1.1)\ C(1) = (1.1)^2\ C_0$ y así sucesivamente. Luego, $C(n) = (1.1)^n\ C_0$, lo que responde nuestra pregunta original. Más generalmente, si el interés que nos paga el banco es 100·I%, lo que tendremos después de n años es $(1 + I)^n C_0$. Nos preguntamos ahora qué sucede si cambiamos el tipo de inversión que tenemos. Denotemos por F_0 nuestro capital inicial, el banco nos paga 100·I% de interés anual, pero la diferencia estriba en que el interés que ganamos se reinvierte en la cuenta m veces al año. Sea $h = 1/m$ la fracción del año que consiste de un periodo de reinversión del interés. (Por ejemplo $h = 1/12$ si el interés se reinvierte mensualmente). Denotemos por n el número de periodos de reinversión considerado. (Así, si h es 1/12 y n es 30, el periodo de tiempo considerado es de dos años y medio).



Entonces tenemos:

$$F(1) = F_0 + (I/m)F_0 = (1 + I/m)F_0,$$
$$F(2) = F(1) + (I/m)F(1) = (1 + I/m)F(1) = (1 + I/m)^2F_0,$$

$$F(n) = F(n-1) + (I/m)F(n-1) = \quad = (1 + I/m)^nF_0,$$

o equivalentemente

$$F(n + 1) - F(n) = I/m\ F(n).$$

Es decir, recordando que h denota la fracción del año que consiste de un periodo de reinversión del interés,

$$F(n + h) - F(n) = IhF\ (n),$$

y dividiendo ambos lados de la ecuación por $h = 1/m$, obtenemos,

$$\frac{F(n+h) - F(n)}{h} = I\ F(n)$$

haciendo m, el número de periodos de reinversión, tender a infinito nos queda

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(n+h) - F(n)}{h} = \lim_{h\to 0} IF(n)$$

es decir, escribiendo t en vez de n, obtenemos

$$F'(t) = I{\cdot}F(t),$$

que es una ecuación diferencial del tipo $f'(t) = af(t)$, considerado en la ley de crecimiento de Malthus, del ejemplo 2.

Un tipo importante de ecuaciones en diferencias son las llamadas *ecuaciones autónomas de primer orden.* Estas son las ecuaciones en diferencias de la forma

$$A_{n+1} = f(A_n),$$

donde f es una función de un conjunto Ω en sí mismo. Así que si hacemos,

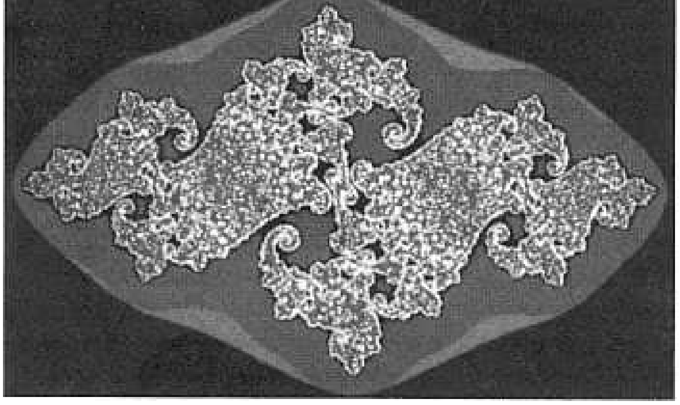
$$f_1 = f,$$
$$f_2 = f \circ f,$$

$$f_n = f \circ \ldots \circ f, \text{ n veces},$$

entonces A_n es el n-ésimo iterado de A_0,

$$A_n = f_n(A_0).$$

Es decir que dada una función f de Ω en sí mismo, nos podemos fijar en todas sus iteraciones $\{f_n\}$, y en el sistema dinámico que estas nos definen. Fascinantes ejemplos y aplicaciones surgen al considerar este tipo de sistemas dinámicos. En cierto sentido, estudiar la dinámica de difeomorfismos en espacios fase de dimensión n es "equivalente" a estudiar la dinámica de ecuaciones diferenciales en espacios fase de dimensión n+1. Por un lado dadas las órbitas de una ecuación diferencial en, digamos $\Re^{n+1}$, nos podemos fijar en pequeñas "transversales" a las órbitas, que son discos de dimensión n, y la ecuación diferencial determina difeomorfismos locales entre estas transversales, los cuales definen el llamado "Mapeo de Poincaré" y el "grupo de holonomía" de la ecuación. Recíprocamente, cualquier difeomorfismo F de un espacio fase X en dimensión n, determina un flujo, o ecuación diferencial, en un espacio fase Y de dimensión n+1, a través de una construcción sencilla llamada "la suspención", y el mapeo de Poincaré de la ecuación diferencial en Y es precisamente el difeomorfismo F. Estas dos construcciones están bien estudiadas y sugerimos al lector interesado consultar la bibliografía (2).



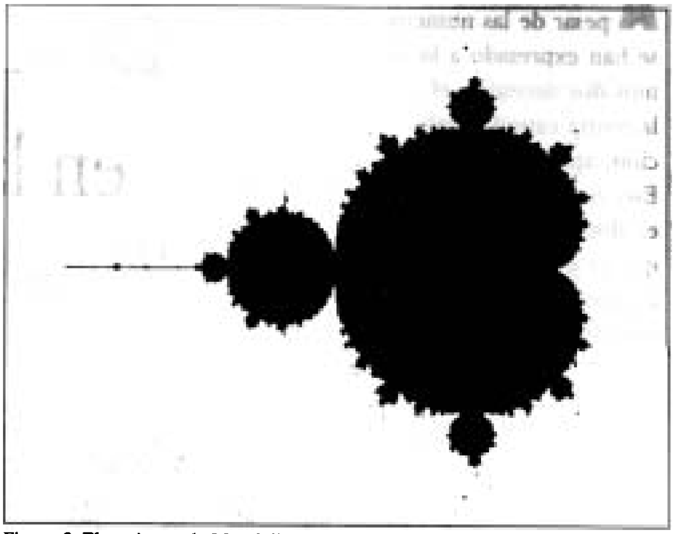


Figura 3. El conjunto de Mandelbrot

Otro ejemplo muy interesante es el de la "familia cuadrática", $f^c : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida para cada constante $c \in \mathbb{C}$, por $f(z) = z^2 + c$. Para cualquier c fija se tiene que ∞ es un punto fijo atractor, pues $| z^2 | = |z|^2$, así que la norma de f(z) crece cuadráticamente. Esto significa que si |z| es suficientemente grande (con respecto a c), entonces

$$\lim_{k \to \infty} f_k^c(z) = \infty.$$

Con puntos de norma pequeña, puede suceder que el punto tienda a infinito o no. Puede entonces suceder que el $0 \in \mathbb{C}$ tienda a ∞ o no, dependiendo del parámetro c. El *Conjunto de Mandelbrot* es el conjunto de valores del parámetro $c \in \mathbb{C}$ para los cuales la sucesión $\{f_k^c(0)\}$ no tiende a infinito. Más sobre este ejemplo puede verse en (3), que tiene un tratamiento muy elemental y accesible. Para una exposición general de la dinámica de la familia cuadrática, véase (4).

Bibliografía

1. M. Braun. 1991, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones,* Versión en español pubicada por Editorial Interamericana.
2. J. Palis & W. de Melo, 1982, *Geometric theroy of dynamical systems,* Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics.
3. J.T. Sandefur, 1990. *Discrete Dynamical Systems,* theory and appications. Oxford Univesity Press.
4. Blanchard 1984, Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere, *Bull. A. M. S.* 11, No. 1 p.85-141.
5. M. Hirsch y S. Smale, 1974, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra.* Academic Press.
6. H.O. Peitgen, 1986, *The beauty of fractals.* Springer Verlarg.

José Seade: Instituto de Matemáticas de la UNAM. Departamento de Matemáticas del ITAM.