Sobre el concepto de derivada de una función

CARLOS MARX

PRESENTACION

Los *Manuscritos matemáticos* de *Carlos Marx* están dedicados a esclarecer la esencia del Cálculo Diferencial.

La explicación propuesta por Marx respecto a los conceptos fundamentales y métodos del Cálculo Diferencial permite, desde el punto de vista del materialismo dialéctico aún en la actualidad, explicar en esencia el cálculo simbólico de la matemática y de la lógica matemática.

Aquí presentaremos la versión castellana de sólo dos manuscritos sobre la noción de derivada.

La versión castellana, es traducción de una parte de la edición bilingüe alemán ruso, cuyo título original es *Matematicheskie rukopisi*, Naura, M., 1968. Esta edición original incluye por primera vez todos los textos de trabajos de Marx que presentan sus aspectos más terminados, así como sus propias anotaciones en apuntes y transcripciones. La edición original contiene comentarios y observaciones de carácter matemático, histórico y de fuentes bibliográficas que la hace accesible a un círculo muy amplio de lectores. La edición estuvo a cargo de Yanovskaya S. A., Rybkin A. Z., Rybnikov K. A. con recomendaciones de Kolmogorov, A. N. y Petrovskii, I. G.

A MANERA DE INTRODUCCION

Desde el prólogo a la segunda edición del *Antidühring* (1885) escrito por Engels, se tiene noticias de que entre los manuscritos de Marx había algunos de contenido matemático a los cuales Engels confería un gran valor y deseaba publicar. Los manuscritos matemáticos están constituidos por aproximadamente 1 000 páginas.

En el 50 aniversario de la muerte de Marx (1933), una parte de tales manuscritos fue publicada en ruso con los títulos: *Bajo la bandera del marxismo* 1933, no. 1, 15-73 y *El Marxismo y las ciencias naturales* 1933, 5-61.

La edición bilingüe original está dividida en dos partes. En la primera, están concentrados los trabajos propios de Marx. En la segunda se da la relación completa de todos sus apuntes y transcripciones de contenido matemático. No obstante tal separación, para una cabal comprensión de las ideas de Marx respecto a sus apuntes y más aún de las citas textuales de otros autores, frecuentemente es necesario conocer la literatura matemática por él resumida. Evidentemente tal imagen sólo la da el libro en su conjunto y no dos de sus manuscritos; sin embargo, en el centésimo aniversario de su muerte, quisimos mostrar un botón que propicie la atención por tales manuscritos.

El interés de Marx hacia la matemática surgió ante necesidades que le planteó la elaboración de su obra *El Capital*; usualmente la estudiaba durante sus convalescencias (1858-1860), habiendo empezado con aritmética comercial, álgebra y rudimentos de geometría. En 1878 el estudio de la matemática empezó a tener en Marx un caracter sistemático. En el análisis de las crisis, Marx intentó varias veces calcular las *alzas y bajas* como *curvas irregulares*, de suerte que matemáticamente pudieran deducirse de ésto las principales leyes. El mejor asesor en matemáticas que tuvo Marx fue Samuel Moore, de modestos conocimientos matemáticos, quien consideró que tal descripción no podía realizarse.

Incluso leyendo globalmente todos sus manuscritos es un gran enigma el por qué Marx pasó del estudio de la aritmética comercial al cálculo diferencial; lo que sí queda claro es que Marx se propone explicar cuál es la esencia del cálculo simbólico que opera con el símbolo de la diferencial. Marx basó sus estudios matemáticos en textos usados en la Universidad de Cambridge y textos conocidos de la época como el de *Sauri, Boucharlat, Euler, MacLaurin, Lacroix, Hind, Hall* y otros. Es digno de recordarse que en la década de los setenta del siglo pasado en el continente europeo se estaba fraguando el análisis clásico contemporáneo, antes que nada en los trabajos de *Dedekind, Cantor y Weierstrass* y sobre todo con la teoría de números reales y límite. Fue una lástima que Marx no haya tenido mejores contactos matemáticos que el señor Moore, aunque en esa época en todo el Reino Unido no hubiera encontrado personas enteradas, ni mucho menos entusiastas, de los trabajos que se realizaban en el continente, pues aún en 1917 *Hardy* se lamenta de que su libro esté escrito en un estilo patético, que ahora se antoja risible, pero que respondía a que en Cambridge en esa época el análisis matemático era menospreciado.

Esta es la causa del por qué seguramente Marx no reacciona respecto a esa problemática que conlleva interesantes conceptos e ideas más modernas. A pesar de ello, sus ideas acerca de la esencia del cálculo diferencial simbólico representan, aún hoy, un cierto interés.

Guillermo Gómez Alcaráz*

Sobre el Concepto de Derivada de una función[1] (manuscrito 4147)

I

Supongamos que la variable independiente x crece hasta el valor x_1 y por lo tanto la variable dependiente y crece hasta y_1.[2]

Aquí en la parte I se considera el caso más simple, cuando x aparece solamente a la primera potencia.

1) $y = ax$ si x crece hasta x_1, entonces

$$y_1 = ax_1$$

luego

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

Si ahora realizáramos la *operación de derivación*, esto es si permitiéramos a x_1 disminuir hasta x, obtendríamos

$$x_1 = x \; ; \; x_1 - x = 0$$

por consiguiente

$$a(x_1 - x) = a \, . \, 0 = 0$$

Luego, dado que y creció hasta y_1 sólo como consecuencia de que x creció hasta x_1, entonces también tendríamos:

$$y_1 = y \; ; \; y_1 - y = 0$$

Por lo tanto

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

se convertiría en

$$0 = 0$$

Primeramente la formación de diferencias y luego inversamente quitarlas nos lleva literalmente a la *nada*. Toda la dificultad para entender la operación de derivación (como también para entender la *negación de la negación*, en general) consiste precisamente en apreciar en *qué* se distingue dicha operación de tal procedimiento simple y cómo lleva por lo tanto a resultados reales.

Si dividimos $a(x_1 - x)$ y respectivamente el primer término de la última ecuación entre el factor $(x_1 - x)$, obtendremos

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

Puesto que y es la *variable dependiente*, ella en general no puede realizar ningún cambio en forma independiente. Debido a ésto [puesto que aquí $y = ax$ no es posible hacer $y_1 = y$ por consiguiente no puede hacerse $y_1 - y = 0$, sin que antes x_1 sea igual a x.

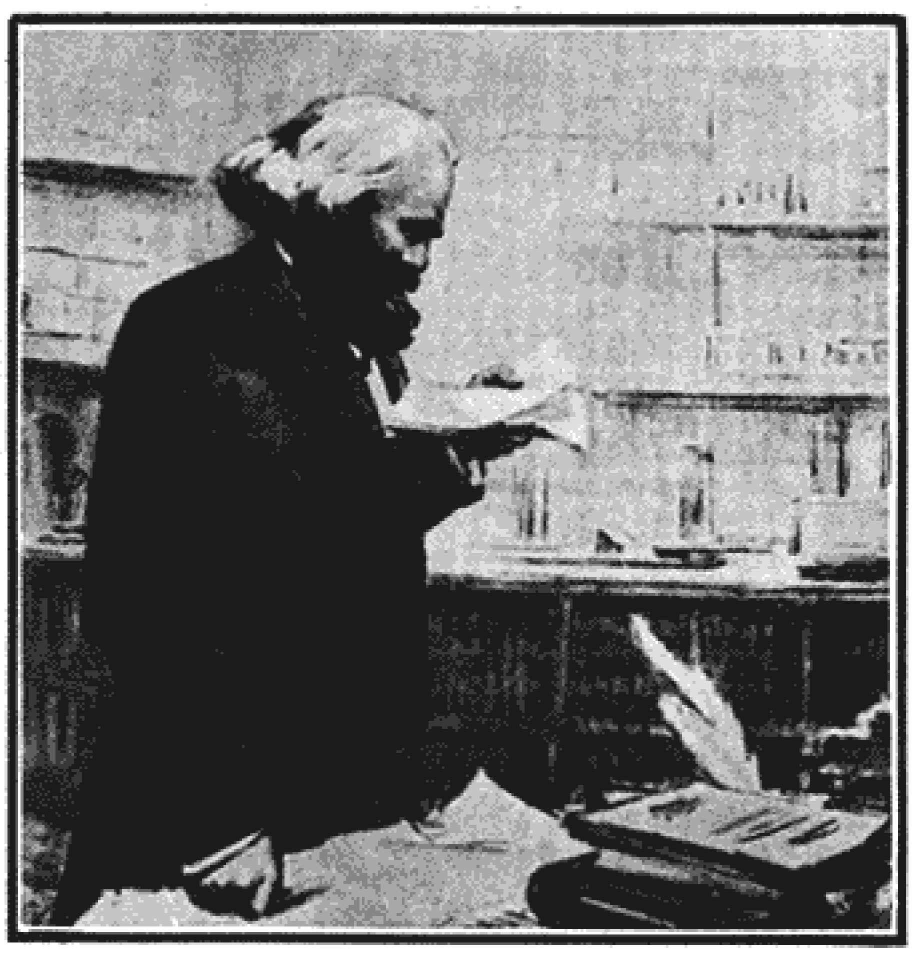
Por otro lado vimos que x_1 no puede ser igual x en la función $a(x_1 - x)$, sin que esta última se reduzca a cero. Por esto el factor $(x_1 - x)$ *necesariamente* resulta una *diferencia finita*[3] en el momento en que dividimos entre dicho factor

1. Este manuscrito fue elaborado por Marx en 1881 para Engels. Es el primer trabajo, del ciclo de manuscritos pensados por Marx, dedicado a la exposición sistemática de sus ideas relativas a la naturaleza e historia del cálculo diferencial. En él, introduce la noción de derivación algebraica que le pertenece y el correspondiente algoritmo para calcular la derivada de ciertas clases de funciones. En el sobre adjunto al manuscrito está una leyenda escrita por Marx: "Para el General". Así llamaba a Engels la familia de Marx por su artículo referente a problemas militares. En cuanto Engels conoció este manuscrito respondió a Marx con carta del 18 de agosto de 1881 (veáse las obras de Marx K. y Engels F., tomo 35 pags. 16-18). El texto alemán del manuscrito se publica con las rectificaciones hechas por Marx al texto original. Algunos de los materiales preparatorios (bosquejos, complementos) se publican en el manuscrito 4146 de la presente edición. Las referencias a borradores no publicados son señaladas con anotaciones al pie de página. Este manuscrito fue publicado por primera vez (incompleto) en 1933 en ruso en la revista *Marksizm y Estiestvoznznanie*, Partizdat, Moscú, 5-11 y en la revista *Pod znamieniem Marksizm* No. 1 (1933) 15. En la edición bilingüe por primera vez aparece en alemán.

2. Para evitar errores con la notación de derivada aquí y en lo subsecuente en casos similares las notaciones usadas por Marx x', y', ... para los nuevos valores de las variables serán sustituidos por x_1, y_1, ...
En las fuentes que Marx utilizó no aparecía la noción de valor absoluto (módulo). Por esto Marx con frecuencia (por lo visto para fijar ideas) considera sólo los valores crecientes de las variables, pero hay veces (veáse por ejemplo en los manuscritos 4001, 4302) que habla también sobre "el crecimiento" de x en un incremento h positivo o negativo".

3. De acuerdo a la terminología acostumbrada en fuentes utilizadas por Marx, al decir *diferencia finita* se sobreentiende una diferencia no igual a cero.

* **Profesor e investigador de la Facultad de Ciencias, UNAM.**



ambos lados de la ecuación. De este modo en el momento en que formamos la relación

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

la expresión $(x_1 - x)$ representa siempre una diferencia finita y por lo tanto $y_1 - y / x_1 - x$ es una *relación entre diferencias finitas;* correspondientemente a esto

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es así que

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad \text{ó}^4 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

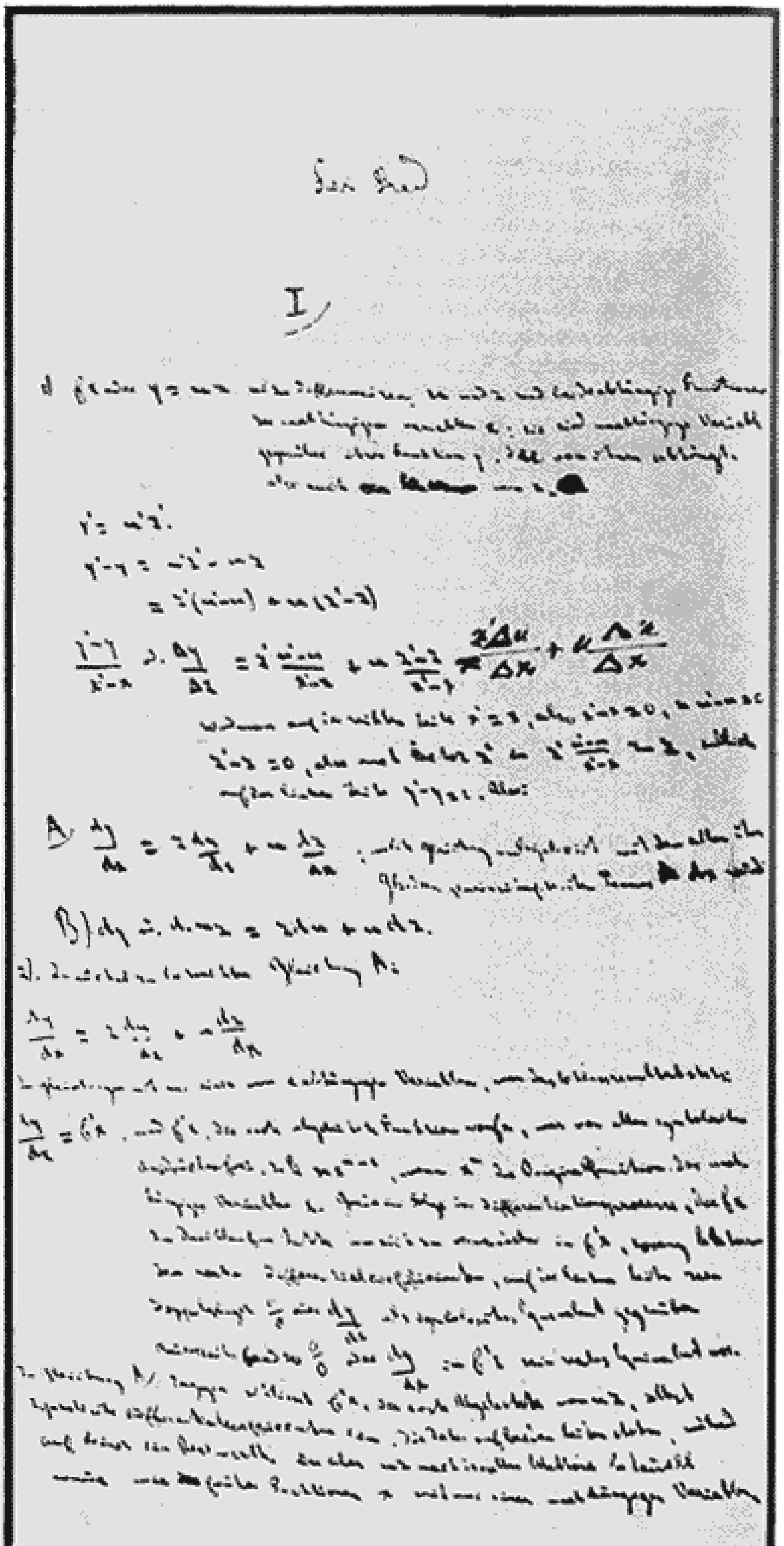
donde la constante a aparece como *límite* de la relación de las diferencias finitas de ambas variables.[5]

Puesto que a es constante, ni a, ni la parte derecha de la ecuación reducida a ella admiten cambio alguno. En tal caso, el proceso de derivación ocurre en la parte izquierda de la ecuación:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad \text{ó} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

4. En toda ecuación, Marx distingue sus dos miembros, los cuales no siempre juegan un papel simétrico. En el miembro izquierdo de la igualdad frecuentemente él coloca dos expresiones sinónimas diferentes unidas por el conectivo "o".

5. En la literatura matemática que Marx tuvo a su disposición, el término *límite* (de una función) no tenía un único significado y lo más frecuente es que se entendiera como el valor de la función, alcanzado por ella finitamente al final de un proceso infinito de aproximaciones de la variable a su valor límite (véase el apéndice: "Sobre el concepto de límite en las fuentes utilizadas por Marx") A la crítica de tales deficiencias está dedicado el manuscrito 4144: "Sobre la unicidad de los términos *límite* y *valor límite.*"
En el presente manuscrito, el término *límite* es utilizado por Marx en un sentido especial: como la expresión que redefine la relación dada para aquellos valores de la variable en los que la expresión original no está definida. Expresiones necesitadas de tal redefinición fueron para Marx las relaciones $\Delta y / \Delta x$ (se reduce a $0/0$ cuando $\Delta x = 0$ y la dy/dx, esta última interpretada como expresión simbólica para una relación de *diferencias finitas eliminadas*, esto es para $0/0$. Marx entiende la aplicación del *límite* a la relación $\Delta y / \Delta x$ en cierta correspondencia con las definiciones de este concepto contenidas en los textos de Hind y Lacroix, a saber: como la expresión idénticamente igual a la relación $\Delta y / \Delta x$, si $\Delta x = 0$ pero redefinida por continuidad cuando se reduce a $0/0$. Lo entendido aquí por *límite* debería entenderse como la *prederivada*. Sobre este particular Marx escribe (véase la parte II) aplicando a la relación $\Delta y / \Delta x$, donde $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: La *prederivada* $a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$ resulta ser el límite de la relación de las diferencias finitas, es decir independientemente de lo pequeñas que sean tales diferencias el valor de $\Delta y / \Delta x$ estará dado por esta *derivada*. Más adelante en el mismo II Marx dice que haciendo x_1 igual a x, o sea $\Delta x = 0$ *lleva este límite a su valor mínimo*, lo cual da como resultado *la derivada definitiva*.
En forma análoga por *límite de la relación de diferenciales* Marx entiende en este manuscrito la expresión *real* (*algebraica*, véase la nota al pie de página No. 6) que le confiere un valor a dicha relación, en otras palabras la función derivada. Sin embargo Marx escribe que en la ecuación $dy/dx = f'(x)$ *ninguno de los dos términos es el valor límite del otro*. Estos términos no se encuentran uno respecto del otro en relación del límite, sino en relación de equivalencia (véase el final del manuscrito 4144). Este mismo término en otro lugar (véase el final del manuscrito 4148, tercer bosquejo) como sustituible por la categoría de límite en el sentido que tiene en el texto de Lacroix, en donde tal categoría posee un valor importante para el cálculo diferencial e integral (sobre la definición de Lacroix véase el apéndice: *Sobre el concepto de límite en las fuentes matemáticas que utilizó Marx*).



y esta resulta ser una característica de funciones simples tales como a x_1

Supongamos que en el denominador de la relación [variable], x_1 decrece aproximándose a x; la frontera de su decrecimiento será alcanzada cuando x_1 se reduce a x de manera que la diferencia $(x_1 - x)$ resulta igual a $x - x = 0$ y consecuentemente también $y_1 - y = y - y = 0$. En esta forma obtenemos

$$\frac{0}{0} = a$$

Dado que en la expresión $0/0$ se esfumó toda huella de su procedencia y valor, entonces la sustituimos por dy/dx donde las diferencias finitas $x_1 - x$ ó Δx y $y_1 - y$ ó Δy y aparecen en forma simbólica como diferencias *eliminadas o desaparecidas*, de manera que $\Delta y/\Delta x$ se convierte en dy/dx.

Así

$$\frac{dy}{dx} = a$$

Ciertos matemáticos racionalizadores se regocijan fuertemente del hecho consistente en que las magnitudes dy y dx cuantitativamente parecen como si sólo fueran magnitudes infinitamente pequeñas [y que su relación] es sólo cercana a $0/0$, resultan una quimera, como será mostrado palpablemente en la parte II. Vale además la pena recordar, como particularidad del caso considerado, que tanto $\Delta y/\Delta y = a$ como $dy/dx = a$, esto es, el límite [de la relación] de las diferencias finitas resulta también el límite [de la relación] de diferenciales.

2) Como 2º ejemplo del mismo caso puede servir:

$$y = x\,;\; y_1 = x_1\,,\; y_1 - y = x_1 - x \qquad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{dy}{dx} = 1$$

II

Cuando tenemos la expresión $y = f(x)$ donde particularmente en el segundo miembro de esta ecuación aparece una función (de) x en su expresión *algebraica desarrollada*[6], llamaremos a tal expresión *función original de* x ;a su primera modificación obtenida mediante el planteamiento de incrementos —"derivada previa" de la función (de) x— mientras que la forma final que toma como resultado del *proceso de derivación* la llamaremos "derivada" *de la función de* x[7].

1) $y = a x^3 + b x^2 + cx - c$

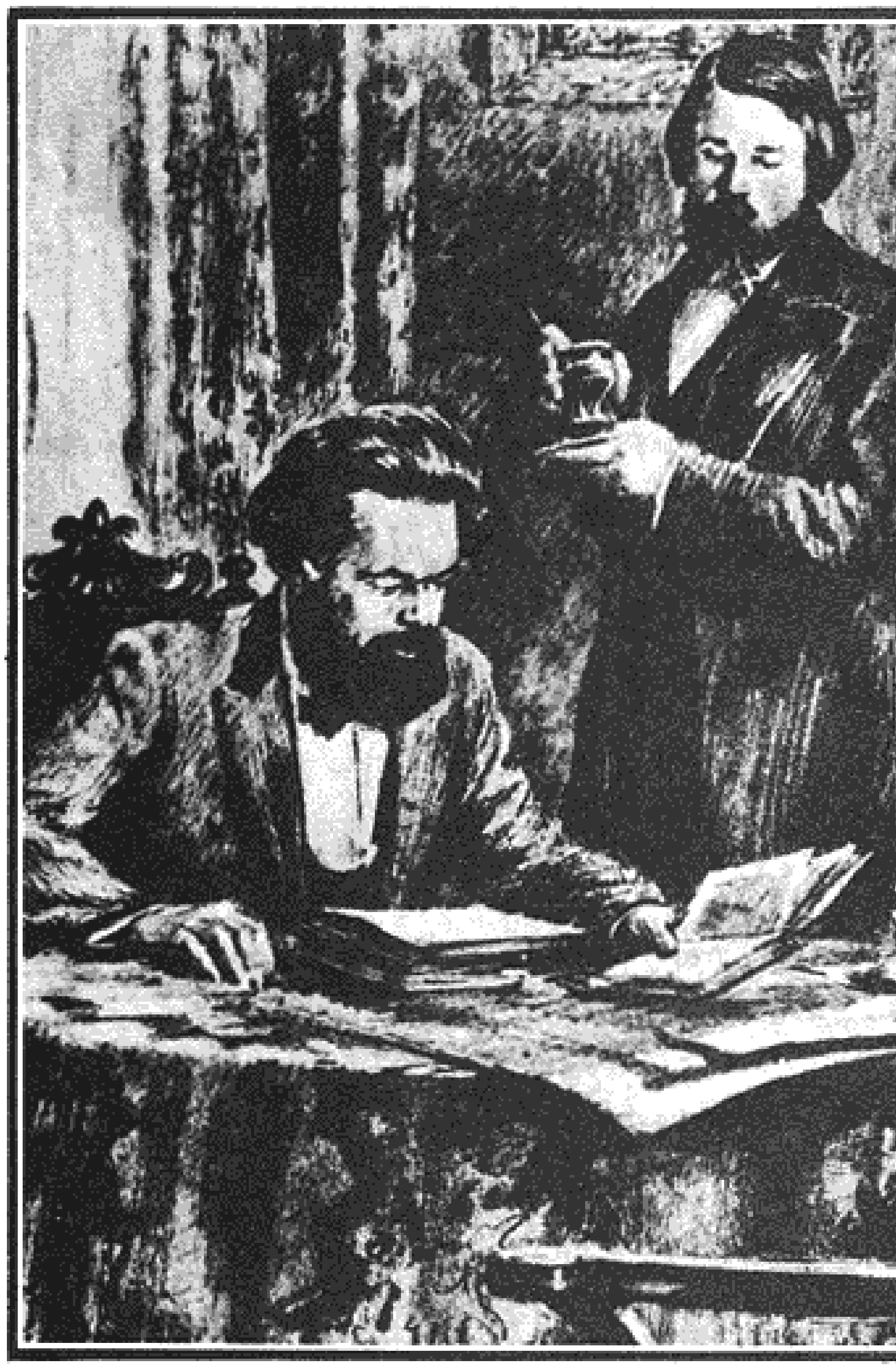
Si x crece hata x_1, entonces

6. Bajo el nombre de *algebraica* Marx entiende toda expresión que no contiene símbolos de derivadas o diferenciales. Tal uso del término *expresión algebraica* es característico de la literatura matemática de principios del siglo XIX.
Con frecuencia Marx distingue los conceptos de función siguientes: *función de (van)* x; y *función en (in)* x, esto es función como correspondencia y función como expresión analítica (véase el manuscrito 4302 *manuscrito inconcluso: Teorema de Taylor*). En el presente manuscrito Marx no se ciñe rigurosamente a tal distinción, mencionando frecuentemente sólo *función (de)* x (donde el *de* es un agregado obligado en castellano, pero que evidentemente no aparece en el original) posiblemente esto se deba a que siempre está hablando de funciones dadas por ciertas *expresiones algebraicas*. La correspondencia que relaciona el valor la variable independiente x con el valor de la varible dependiente y Marx la da mediante la ecuación $y = f(x)$ donde y es la variable dependiente y $f(x)$ es la expresión analítica, considerada respecto a la variable incluida, x.

7. La esencia del método de derivación algebraica presentado por Marx consiste en que la relación $f(x_1) - f(x)/x_1 - x$ el cociente de incrementos (que tiene sentido sólo si $x_1 \neq x$) él la redefine por continuidad en $x_1 = x$ Con este fin es que busca la función $\varphi(x_1, x)$ la cual para $x \neq x$ coincide con la relación $f(x_1) - f(x)/x_1 - x$ es continua bajo $x_1 \to x$. tal función $\varphi(x_1, x)$ Marx le llama *función derivada previa de la función* $f(x)$. Si esta última existe (lo cual tiene lugar para la clase de funciones aquí consideradas), entonces dicha derivada coincide con la actual noción de derivada:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x)$$

En esta época a Marx ya le eran conocidas funciones para las que el operador derivada no estaba definido (véase el manuscrito 4302).



$$y_1 = a x_1^3 + b x_1^2 + c x_1 - c$$

$$y_1 - y = a (x_1^3 - x)^3 + b (x_1^2 - x^2) + c (x_1 - x)$$

$$= a (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b (x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x)$$

De donde:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a (x_1^2 + x_1 x + x^2) + b (x_1 + x) + c$$

La "derivada" previa

$$a (x_1^2 + x_1 x + x^2) + b (x_1 + x) + c$$

aquí resulta ser el límite del cociente de incrementos, es decir, no importa que tan pequeños sean tomados estos incrementos el valor de $\Delta y/\Delta x$ quedará dado por esta "derivada". Sin embargo tal valor no coincide, como en la parte I, con el límite del cociente de diferenciales.*

Si en la función

$$a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

la variable x_1 decrece, hasta no alcanzar la frontera de su disminución, esto es, hasta no llegar a ser igual a x, entonces x_1^2 se transforma en x^2, $x_1 x$ en x^2 y $x_1 + x$ en $2x$ y así obtenemos la "derivada" de la función (de) x:

$$3ax^2 + 2bx + c$$

* Luego de esta frase en el borrador de este manuscrito (4146, p. 4) se dice: *Por otro lado, el proceso de derivación ocurre ahora en la* derivada *previa de la función (de)* x *(parte derecha), mientras que en la parte izquierda necesariamente el mismo proceso acompaña a este movimiento.*

Aquí claramente se revela lo siguiente:

En *primer lugar*, para la obtención de la "derivada" es necesario hacer x_1 igual a x, lo que significa desde *un punto de vista matemático estricto* que $x_1 - x = 0$ sin rodeos debidos solamente a la aproximación infinita.

En *segundo lugar*, el hecho de hacer $x_1 = x$ por lo tanto $x_1 - x = 0$, no agrega absolutamente nada simbólico a la "derivada".** La magnitud x_1 introducida originalmente a través de la variación de x no desaparece, tal magnitud solamente *se reduce* a su límite mínimo $= x$ y permanece como cierto elemento de nuevo introducido en la función (de) original. Esta magnitud x_1 en combinacionaes parciales consigo misma y parcialmente con la x de la función original nos da la derivada definitiva, o sea, la "derivada" previa *reducida a su magnitud mínima*.

La reducción de x_1 a x dentro de la función primera derivada (previa) transforma la parte izquierda $\Delta y/\Delta x$ en $0/0$ ó en dy/dx lo cual significa que

$$\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{dy}{dx} = 3ax^2+2bx+c$$

de tal manera que la *derivada* aparece como el *límite* de la relación de las diferenciales.

La tribulación trascendente o simbólica ocurre solamente en la parte izquierda de la expresión, pero ya habiendo perdido su forma horripilante, dado que ahora aparece solamente como una expresión del proceso, cuyo contenido real aparece en la parte derecha de la misma ecuación.

En la "derivada"

$$3ax^2 + 2bx + c$$

la variable x se encuentra en condiciones totalmente distintas a las que se encontraba en la función original (de) x (precisamente en $ax^3 + bx^2 + cx - e$. Por ésto, ella (esta derivada) a su vez puede aparecer como función original y mediante la reanudación del proceso de derivación establecido ser de nuevo fuente de una cierta "derivada". Esto puede repetirse hasta que la variable ¡x no sea finalmente eliminada de alguna derivada, por lo tanto, esto puede extenderse infinitamente sólo en aquellas funciones de x representables como sumas infinitas lo que ocurre en la mayoría de los casos.

Los símbolos d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, etc., indican sólo la "derivada" genealógica respecto de la función original (de) x dada inicialmente. Sólo aparecen como símbolos mágicos en caso de interpretarlos como *punto de partida* del movimiento y no simplemente como *expresiones* de las *funciones* (de) x *deducidas*. Entonces en efecto parece sorprendente que la relación de magnitudes que se anulan deben nuevamente pasar por grados superiores de anulación, mientras que a nadie le sorprende que por ejemplo $3x^2$ puede recorrer el proceso de derivación tan exitosamente com su progenitora x^3. Dado que de $3x^2$ podemos partir como de una función original de x.

Sin embargo *notabene*. El cociente de incrementos $\Delta y/\Delta x$ es el punto de partida del *proceso de derivación* prácticamente sólo en ecuaciones como las tratadas en la parte I, donde x aparece sólo a la primera potencia. Pero entonces como se muestra en la parte I, obtendremos como resultado que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}$$

Por ende, aquí mediante el proceso de derivación, por el que pasa $\Delta y/\Delta x$, efectivamente no se determina *ningún nuevo límite*. Esto [la búsqueda del nuevo límite] es posible sólo debido a que la "derivada" previa contiene a la variable x, es decir, porque dy/dx permanece como símbolo de cierto proceso real.*

Esto, evidentemente de ninguna forma impide el que en el cálculo diferencial los símbolos dy/dx, d^2y/dx^2, etc. y sus combinaciones aparezcan en el lado derecho de la ecuación. Pero entonces sabemos también que tales ecuaciones simbólicas puras sólo señalan aquellas *operaciones* que luego hay que realizar sobre las funciones reales de sus variables.

2) $y = ax^m$

Si x se convierte en x_1, entonces $y_1 = ax^m$ y

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m)$$

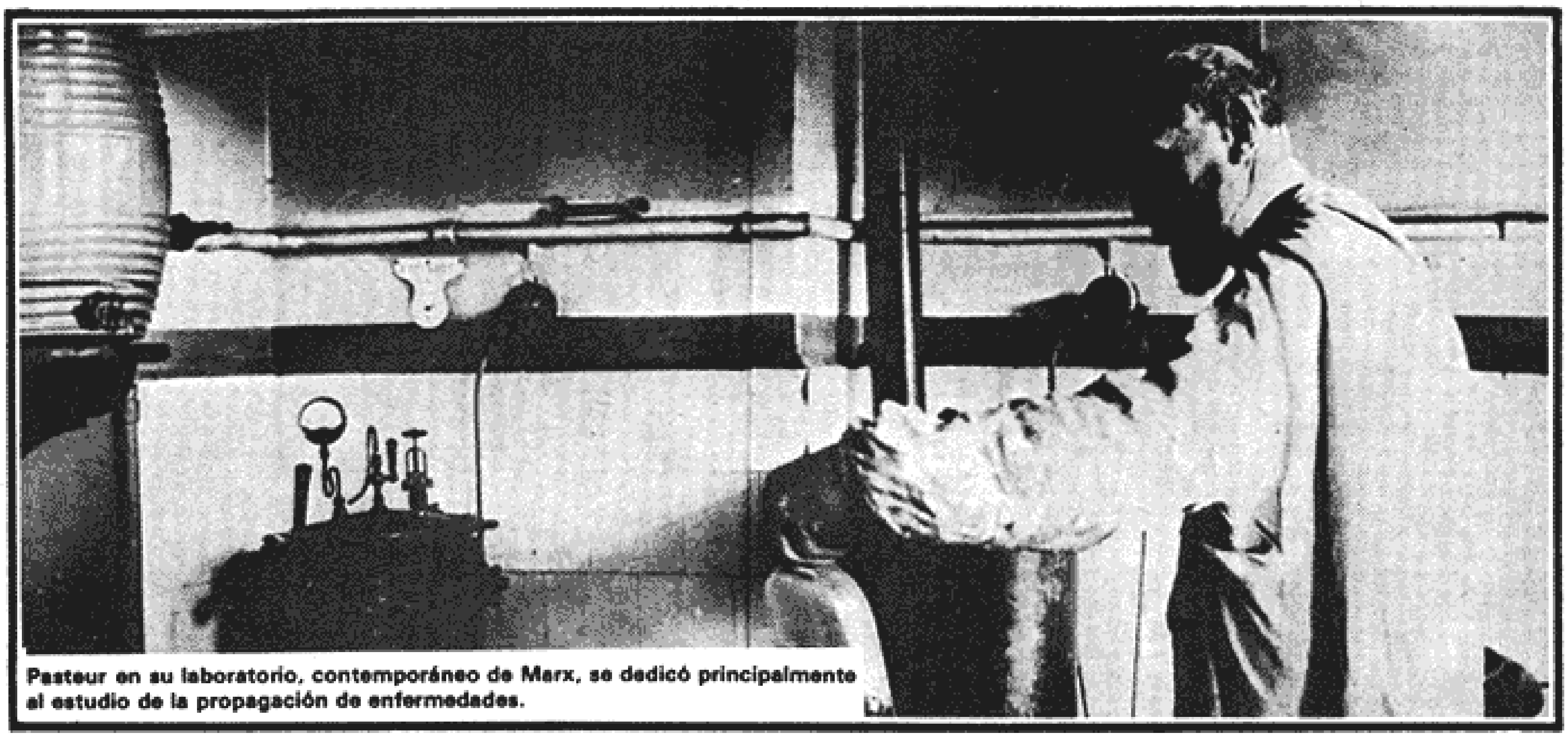
$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc.}$$

hasta el término $x_1^{m-m}x^{m-1})$

* *La frase correspondiente en el borrador (p. 7) dice así: Esto puede obtenerse sólo allí, donde la función* derivada *previa contiene la variable* x, *por eso también su movimiento puede formar cierto nuevo valor auténtico, de manera que* dy/dx *es el símbolo de un proceso real.*

** *En lugar de ésto, en el borrador se dice lo siguiente: b) la búsqueda de la* derivada *de la función original (de)* x *ocurre de manera que primeramente tomamos cierta* derivación finita- *[formando los incrementos, o sea las diferencias finitas]: esto último nos da la* derivada *previa, que resulta ser el* límite *para* $\Delta y/\Delta x$. *Al proceso de derivación que en seguida pasamos lleva a este* límite *a su* valor mínimo. *La magnitud* x_1 *introducida en la primera derivación no desaparece...*

En los años que realizó Carlos Marx sus trabajos en matemáticas se inauguró la máquina de vapor Corliss, de 700 toneladas, la más poderosa del mundo.



Pasteur en su laboratorio, contemporáneo de Marx, se dedicó principalmente al estudio de la propagación de enfermedades.

tendremos

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \dots + x_1^{m-m}x^{m-1}$$

Si ahora aplicamos a esta "derivada previa"* el proceso de derivación, de manera que al hacer $x_1 = x$ ó $x_1 - x = 0$ tendremos que

x_1^m Se transforma en x^{m-1}

$x_1^{m-2}x$ Se transforma en $x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}$

$x_1^{m-3}x^2$ Se transforma en $x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$

y finalmente

$x_1^{m-m}x^{m-1}$ Se transforma en $x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}$

Obtenemos de este modo, m veces la función x^{m-1} y la "derivada" es consecuentemente max^{m-1}.

Gracias a la igualdad de $x_1 = x$ en la "derivada previa"* el lado izquierdo el cociente $\Delta y/\Delta x$ se transforma en 0/0 ó dy/dx, de donde

$$\frac{dy}{dx} = m a x^{m-1}$$

Podrían exponerse de esta manera todas las operaciones del cálculo diferencial, pero resultaría un pedantismo diabólico innecesario. De todas formas plantearemos aquí un ejemplo adicional, ya que en los anteriores la diferencia $x_1 - x$ aparecía en la función (de) x *sólo una vez* y por eso al formar la expresión

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

desaparecía de la parte derecha. Esto no ocurre en el siguiente caso:

$$y = a^x$$

Si x se transforma en x_1, entonces

$$y_1 = a^{x_1}$$

de donde

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1 - x} - 1)$$

* Es decir, en el lado derecho.

[pero]

$$a^{x_1 - x} = \{1 + (a-1)\}^{x_1 - x}$$

y

$$\{1 + (a-1)\}^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1.2}(a-1)^2 + \text{etc.}^8$$

de donde

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1 - x} - 1) = a^x\{(x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}\}$$

9 ∴

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\{(a-1) + \frac{x_1 - x - 1}{1.2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}\}$$

Si ahora hacemos $x_1 = x$ y por consecuencia $x_1 - x = 0$, obtendremos entonces como "derivada"

$$a^x\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\}$$

y así:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\}$$

Si designamos ahora la suma de constantes en las llaves a través de A, entonces

$$\frac{dy}{dx} = A a^x$$

aquí, sin embargo A = al logaritmo neperiano del número a, resulta ser igual que la dy/dx o, si se sustituye a y por su valor, $da^x/dx = \log a . a^x$, y

$$d a^x = \log a . a^x dx$$

8. Aquí Marx reprodujo el desarrollo formal de una función en serie característico de los libros de matemáticas a los que él tuvo acceso, dejando de lado los problemas de convergencia de la serie obtenida y coincidencia de los valores de la función con los límites de las sumas parciales.

9. ∴ símbolo usado en las demostraciones para sustituir la frase *por lo tanto*.

Complemento[10]

Teníamos

1) Los casos considerados, donde el factor $(x_1 - x)$ aparece sólo una vez en [la expresión, que lleva a] "derivada previa", o sea a la ecuación en diferencias finitas[11], como consecuencia de lo cual al dividir ambos lados por $x_1 - x$ se forma [una expresión para]

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[que no contiene la diferencia introducida $x_1 - x$], es decir este factor se simplifica de la función (de) x.

2) (En el ejemplo: $d(a^x)$) los casos considerados, donde permanecen factores $(x_1 - x)$ en la función (de) x luego de formar [la relación] $\Delta y / \Delta x$.[12]

3) Falta considerar aún aquel caso, donde el factor $x_1 - x$ *directamente no* se elimina de la primera ecuación en diferencias ([que nos lleva a] la "derivada previa".

$$y = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2}$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

dividimos esta función de x — consecuentemente también la parte izquierda— entre $x_1 - x$. Entonces

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ó } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}$$

Para librar al lector de las irracionalidades multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$ y obtenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} =$$

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

pero

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}$$

por lo tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Si ahora se hace $x_1 = x$ ó $x_1 - x = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

por lo tanto

$$dy \quad d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

10. El texto titulado *Complemento* lo constituye el contenido adjunto en una hoja separada al manuscrito, la cual tiene numeradas sus páginas en forma independiente: 1 y (el reverso 2).

Bajo *ecuación en diferencias finitas*, por lo visto, Marx tiene en mente expresiones tipo: $f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)\,\varphi(x_1, x)$ (véase la anotación 7).

12. En este lugar Moore escribió a lápiz: *No es así, estos factores so* $x_1 - x$ 1, $x_1 - x$ 2, etc. *Por lo visto, Marx aquí presuponía no los factores* $(x_1 - x)$, *sino las expresiones* $x_1 - x$ *y quiso decir que la reducción a cero de la diferencia* $x_1 - x$ *conservadas* en las expresiones para la derivada previa, no priva de veracidad a esta última.

Textos citados

Bouchalart J.L., **Elements de calcul differentiel et de calcul integral**, 5-me éd., Paris 1838.
Euler L., **Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum**, Berlin, 1755.
Hall Th. G., **The elements of algebra**, 3rd. ed., Cambridge, 1850.
Hind J., **The principles of the differential calculus; with its application to curves and curve surfaces**, 2-nd ed., Cambridge 1831.
Lacroix S. F., **Traité du calcul différentiel et du calcul intégral**, 3 vol., 2nd éd., Paris, 1810-1819.
MacLaurin C. A., **Treatise of algebra in 3 parts**, 6th. ed., London 1976.
Sauri, **Cours complet de mathématiques**, 5 vol., Paris 1778.