¿Quién robó el reloj?

Algo de lógica matemática

JOSÉ LU S ÁLVAREZ GARCÍA

En una mansión de la campiña inglesa, propiedad de una hermosa y rica viuda, se ha cometido un robo: un valioso reloj de oro, que pertenecía a la familia hacía ya varias generaciones, fue sustraído de la caja de seguridad. El Dr. Watson, después de realizar arduas investigaciones —aplicando las técnicas aprendidas durante sus andanzas con su famoso socio y de las cuales no nos quiso revelar nada—, llegó a la conclusión de que John, el mayordomo, y Elizabeth, el ama de llaves, eran las únicas personas que pudieron haber cometido el hurto. Además de eso, con respecto al día en que se llevó a cabo el delito, pudo establecer lo siguiente:

1. Si John sirvió el desayuno a las 8:00 horas, entonces estuvo en el pueblo toda la tarde.
2. Si Elizabeth lavó la ropa el día anterior, entonces permaneció todo el día en la casa.
3. Si John sirvió el desayuno a las 8:00 horas, entonces él fue el autor del robo.
4. Si Elizabeth no lavó la ropa el día anterior, entonces ella fue la autora del robo.

Después de investigar durante un par de días, Watson estaba completamente seguro de los siguientes hechos:

I. John estuvo en el pueblo toda la tarde.

II. Elizabeth se ausentó varias horas de la casa.

Con tal información, el Dr. Watson pudo determinar quién era el culpable, por lo cual fue posible aprehenderlo y obligarlo a devolver el reloj.

Este breve relato resultará un sencillo ejercicio de lógica proposicional para los lectores que estén familiarizados con el tema; sin embargo, hay quienes consideran estos temas, y a las matemáticas en general, como algo demasiado abstruso o incomprensible, con el consiguiente desagrado hacia esta ciencia.

Este rechazo hacia las matemáticas radica en buena parte en la incomprensión del lenguaje y los métodos que en ella se utilizan. En este trabajo consideraremos algunos aspectos de la precisión en el lenguaje matemático que, si bien es cierto que resulta sumamente restringido, evita problemas de ambigüedad en sus expresiones. Además, la precisión es fundamental en la elaboración de las teorías matemáticas.

En tal sentido, las matemáticas utilizan unos elementos de construcción que se denominan "proposiciones". Éstas tienen una propiedad muy útil, que es la de satisfacer una, y solamente una, de las siguientes condiciones: son verdaderas o son falsas. A partir de relaciones entre proposiciones simples, podemos construir nuevas proposiciones que, como tales, cumplen también con la propie-

El manipulador de hombres. Abel Quezada

La dama del abrigo rosa. Abel Quezada

dad de ser verdaderas o falsas. Dos relaciones muy importantes entre las proposiciones son la de implicación y la de equivalencia, ya que los axiomas y teoremas de las matemáticas tienen dichas estructuras.

La relación de implicación entre dos proposiciones

Si tenemos dos proposiciones involucradas, p y q, y consideramos sus valores de verdad, hay 4 casos posibles: p verdadera y q verdadera; p verdadera y q falsa; p falsa y q falsa; p falsa y q verdadera.

La proposición "p implica q" es verdadera si es imposible que se dé el caso p verdadera y q falsa. (Es importante el orden, ya que es diferente "p implica q" a "q implica p"). Esto es, si "p implica q" es verdadera, solo se pueden dar, a lo más, los otros tres casos. Pongamos un ejemplo sencillo.

Sean las proposiciones p y q definidas como sigue:

p: "Juan nació en la República Mexicana".

q: "Juan nació en la ciudad de México".

Veamos cuáles casos pueden ocurrir.

Si Juan nació en la ciudad de México, p es verdadera y q también. Si Juan no nació en la República Mexicana, p es falsa y q también. Pero si Juan nació, por ejemplo, en Veracruz, p es verdadera y q es falsa.

Este último caso (p verdadera, q falsa) es el que determina que la proposición "p implica q" es falsa. En este ejemplo vemos que los casos posibles son: p verdadera y q verdadera; p verdadera y q falsa; p falsa y q falsa. Nótese que si Juan no nació en la República Mexicana es imposible que q sea verdadera (no se da el caso: p falsa, q verdadera).

Ya dijimos anteriormente que el orden de las proposiciones p y q es importante. La proposición "p implica q" en este caso es falsa, ¿cómo es la proposición "q implica p"?

Según la definición de la relación de implicación esta es verdadera si es imposible que la proposición de la izquierda (también llamada hipótesis) sea verdadera y la proposición de la derecha (también llamada tesis) sea falsa. En este ejemplo que estamos analizando, ya vimos que es imposible que p sea falsa y q verdadera. Por lo tanto, si nos referimos a la proposición "q implica p", es imposible que la hipótesis sea verdadera y la tesis falsa. Esto es, la proposición "q implica p" es verdadera.

Resumiendo el ejemplo que nos ocupa, tenemos que "p implica q" es falsa, pero "q implica p" es verdadera. En otras palabras: si Juan nació en la República Mexicana, eso *no* implica que nació en la ciudad de México; pero si Juan nació en la ciudad de México, eso sí implica que nació en la República Mexicana.

Veamos ahora, para finalizar con la implicación entre proposiciones, algo sobre la nomenclatura en torno a ella.

Para referirse a la implicación entre dos proposiciones se utiliza el símbolo " $\Rightarrow$ ". De esta manera, "$p \Rightarrow q$" se lee: "p implica q". Es importante señalar que en los textos se hace referencia a la implicación de muy diversas maneras, algunas de las cuales son las siguientes:

—"p implica q".

—"q es implicada por p".

—"Si p, entonces q".

—"p es condición suficiente para que se cumpla q".

—"q es condición necesaria para que se cumpla p".

En el ejemplo mostrado vimos que la implicación entre p y q solamente era verdadera en un sentido, veamos ahora qué ocurre cuando la implicación es verdadera en ambos sentidos.

La relación de equivalencia entre dos proposiciones

Si la implicación "$p \Rightarrow q$" es verdadera y también la implicación "$q \Rightarrow p$", se dice que p y q son equivalentes.

Supongamos que "$p \Rightarrow q$" es verdadera, por lo tanto solo pueden ocurrir, a lo más, los siguientes casos: p verdadera y q verdadera; p falsa y q falsa; p falsa y q verdadera.

Ahora bien, si queremos que "$q \Rightarrow p$" también sea verdadera, no debe ocurrir el último de estos tres casos (p falsa y q verdadera). Por lo tanto, para que la implicación se cumpla en ambos sentidos

("$p \Rightarrow q$" y "$q \Rightarrow p$"), los únicos casos posibles deben ser: p verdadera y q verdadera; p falsa y q falsa. En otras palabras, para que p y q sean equivalentes, deben tener siempre los mismos valores de verdad (las dos verdaderas o las dos falsas). En el ejemplo considerado en la sección anterior la proposición "$p \Rightarrow q$" es falsa, pero la proposición "$q \Rightarrow p$" es verdadera, o sea que p y q no son equivalentes. Esto es, decir "Juan nació en la República Mexicana" *no* es equivalente a decir "Juan nació en la ciudad de México", y viceversa. Veamos ahora un ejemplo sencillo en el que las proposiciones p y q sí son equivalentes:

p: "Hoy es lunes".

q: "Mañana es martes".

Si la proposición p es verdadera, es imposible que la proposición q sea falsa. Así también, si p es falsa, es imposible que q sea verdadera. Por lo tanto, los únicos casos que pueden ocurrir son: p verdadera y q verdadera; p falsa y q falsa. O sea, que se cumplen simultáneamente las proposiciones "$p \Rightarrow q$" y "$q \Rightarrow p$" o, en otras palabras, p y q siempre tienen el mismo valor de verdad (ambas son verdaderas o ambas falsas). Tenemos, entonces, que p y q son equivalentes.

Si dos proposiciones, p y q, son equivalentes, se cumple la implicación en el sentido "$\Rightarrow$" y también en el sentido "$\Leftarrow$". Por esta razón, la relación de equivalencia o de doble implicación entre dos proposiciones se denota con el símbolo "$\Leftrightarrow$".

La proposición "$p \Leftrightarrow q$", que se lee: "p es equivalente a q", es mencionada de diferentes maneras en los textos, algunas de las cuales se muestran a continuación:

—"p es equivalente a q".

—"p si y solo si q".

—"p es una condición necesaria y suficiente para q".

—"q es una condición necesaria y suficiente para p".

—"p implica y es implicada por q".

—"p implica a q, y recíprocamente".

No es la intención de estas líneas desarrollar de manera precisa y exhaustiva el tema de la lógica proposicional, sino únicamente mencionar aspectos fundamentales del lenguaje de las matemáticas, e invitar al lector a que consulte alguno de los libros que señalamos al final para un estudio más amplio y sistemático de las relaciones entre proposiciones. Con este propósito, presentamos unos ejercicios un poco más elaborados mediante los cuales ejemplificamos tales relaciones, y que nos ayudarán a entender cómo resolvió el Dr. Watson el caso del reloj robado.

Ejemplo I

Se tiene un conjunto de tarjetas con las siguientes características: en el anverso tiene una letra **A** o una **B** y en el reverso llevan diagonales o cuadros.

Alguien revisa todas las tarjetas y encuentra que:

Todas las que tienen una **A** en el anverso, tienen cuadros en el reverso.

(Nótese que esta proposición tiene la forma "si tiene una **A** en el anverso, entonces tiene cuadros en el reverso", o en otras palabras, "una **A** en el anverso implica cuadros en el reverso").

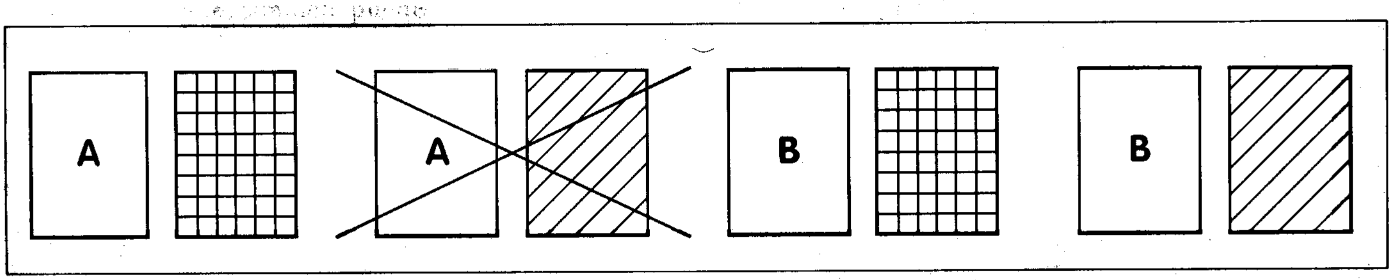
Con este hecho, ¿cómo son las siguientes proposiciones: verdaderas, falsas o falta información?

1. Si tiene cuadros en el reverso, entonces tiene una **A** en el anverso.
2. Si tiene una **A** en el anverso, entonces tiene diagonales en el reverso.
3. Si tiene una **B** en el anverso, entonces tiene cuadros en el reverso.
4. Si tiene una **B** en el anverso, entonces tiene diagonales en el reverso.
5. Si tiene diagonales en el reverso, entonces tiene una **A** en el anverso.
6. Si tiene diagonales en el reverso, entonces tiene una **B** en el anverso.
7. Si tiene cuadros en el reverso, entonces tiene una **B** en el anverso.
8. Si tiene una **A** en el anverso, entonces tiene cuadros en el reverso.

Se tienen tarjetas con una **A** o una **B** en el anverso y cuadros o diagonales en el reverso. En general pueden existir 4 tipos de tarjetas: **A** en el anverso y cuadros al reverso; **A** en el anverso y diagonales al reverso; **B** en el anverso y cuadros al reverso; **B** en el anverso y diagonales al reverso.

De acuerdo con la información obtenida al revisar las tarjetas, sabemos que *todas* las que tienen una **A** en el anverso tienen cuadros al reverso. Esto significa que no puede haber tarjetas con **A** en el anverso y diagonales al reverso. También hay que darnos cuenta de que la información obtenida nos dice "una **A** en el anverso implica cuadros al reverso", pero no nos da información sobre "cuadros al reverso implica una **A** en el anverso". Esto es, "una **A** en el anverso" y "cuadros al reverso" no son equivalentes, pues pueden existir tarjetas con cuadros al reverso, pero con una **B** en el anverso. Por lo tanto, puede haber 3 tipos de tarjetas: **A** en el anverso y cuadros al reverso; **B** en el anverso y cuadros al reverso; **B** en el anverso y diagonales al reverso.

Con estas consideraciones, veamos ahora cómo son las proposiciones 1-8.



El corredor solitario de Central Park. Abel Quezada

Respecto a la proposición 1, falta información, ya que sabemos que *todas* las que tienen **A** en un lado tienen cuadros en el reverso, pero puede suceder que haya tarjetas con cuadros detrás y una **B** al frente. La proposición 2 es falsa, ya que *todas* las que tienen **A** en el anverso, tienen cuadros en el reverso. En la proposición 3 falta información, ya que esta combinación es posible, pero también existen tarjetas con una **B** en el anverso y diagonales detrás. En la 4 también falta información, por la misma razón que en la 3. La proposición 5 es falsa, ya que sabemos que todas las que tienen una **A** en el anverso llevan cuadros en el reverso. La 6 es verdadera, ya que si tiene diagonales en el reverso, sabemos que no puede tener una **A** en el anverso. Para la 7 falta información, ya que existe esa posibilidad, pero además sabemos que todas las que tienen **A** en el anverso, también tienen cuadros detrás. La 8 es verdadera, pues fue verificada directamente.

Ejemplo II

Ahora tenemos tarjetas que en el anverso tienen un **1** o un **2**, y en el reverso son negras o blancas.

Una persona revisa todas las tarjetas y encuentra que:

i. Todas las tarjetas que tienen un **1** en el anverso, son negras al reverso.

ii. Todas las tarjetas que son blancas al reverso, tienen un **2** en el anverso.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas y en qué casos falta información?

1. Si tiene un **1** en el anverso, entonces es blanca al reverso.
2. Si tiene un **1** en el anverso, entonces es negra al reverso.
3. Si es negra al reverso, entonces tiene un **1** en el anverso.
4. Si tiene un **2** en el anverso, entonces es negra al reverso.
5. Si tiene un **2** en el anverso, entonces es blanca al reverso.
6. Si es blanca al reverso, entonces tiene un **2** en el anverso.
7. Si es negra al reverso, entonces tiene un **2** en el anverso.
8. Si es blanca al reverso, entonces tiene un **1** en el anverso.

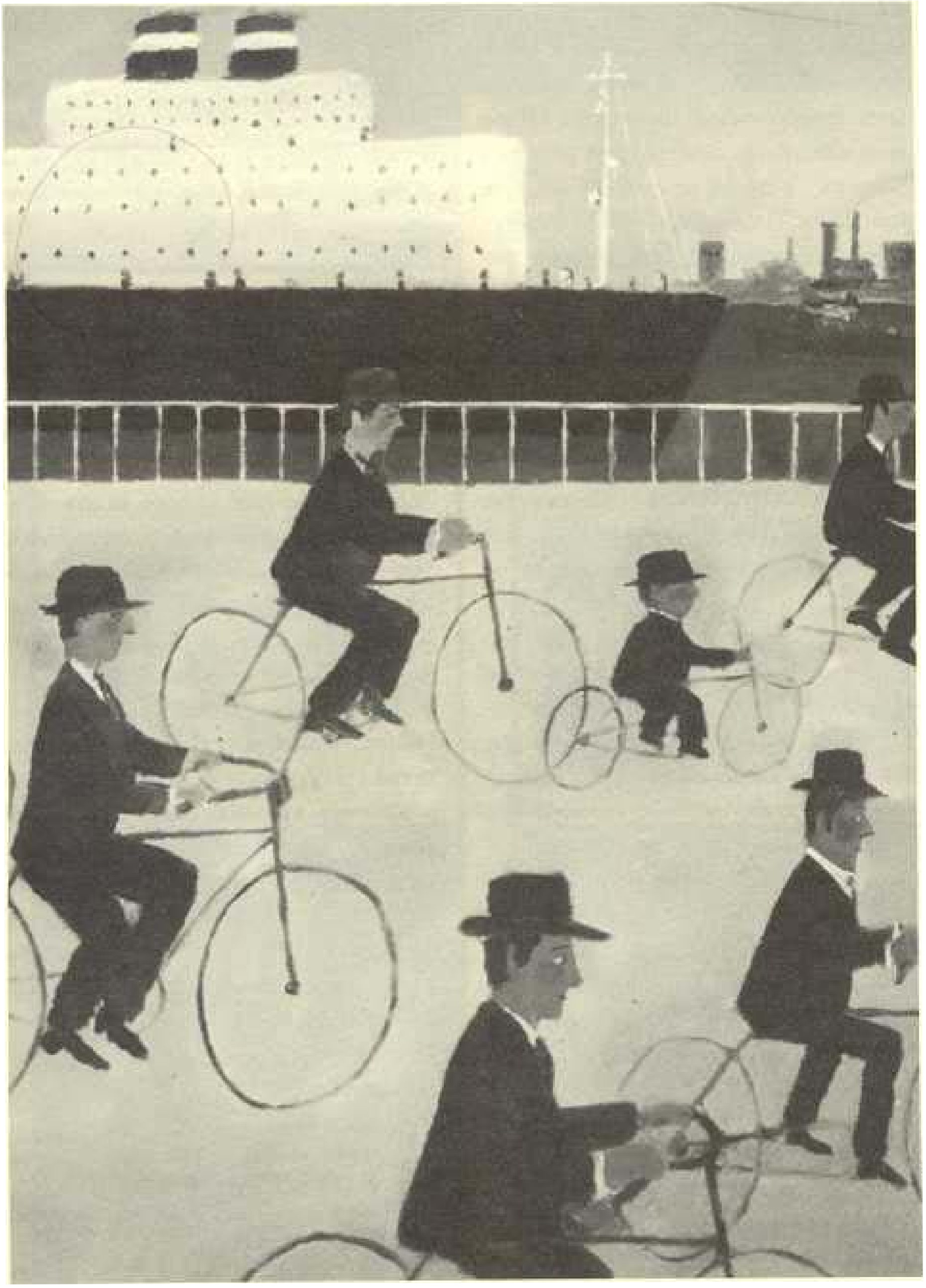
En este ejemplo, las tarjetas pueden tener en el anverso un **1** o un **2**, y en el reverso son negras o blancas. En general pueden darse las siguientes posibilidades: un **1** en el anverso y negra al reverso; un **1** en el anverso y blanca al reverso; un **2** en el anverso y negra al reverso; un 2 en el anverso y blanca al reverso.

Según la proposición i, al revisar las tarjetas se encuentra que *todas* las tarjetas que tienen un **1** en el anverso, son negras al reverso. Esto elimina la posibilidad de que haya tarjetas con un **1** en el anverso y blancas al reverso, pero pueden aparecer las otras tres posibilidades.

También al verificar las tarjetas, según la proposición ii, se encuentra que *todas* las tarjetas que son blancas al reverso, tienen un **2** en el anverso. Esto elimina la posibilidad de que haya tarjetas blancas al reverso con un **1** en el anverso, pero persisten las otras 3 posibilidades.

Vemos, entonces, que las proposiciones i y ii nos dan exactamente la misma información: que no puede haber tarjetas con un **1** en el anverso y blancas al reverso. Estas dos proposiciones son equivalentes entre sí y hubiera bastado con la información proporcionada por cualquiera de ellas. Las tarjetas posibles en este ejemplo son: un **1** en el anverso y negras al reverso; un **2** en el anverso y negras al reverso; un **2** en el anverso y blancas al reverso.

Nuevamente, con estas consideraciones, veamos cómo son las proposiciones 1-8 del ejemplo II.



La proposición 1 es falsa, ya que sabemos que *todas* las que tienen un 1 en el anverso, son negras al reverso. La número 2 es verdadera ya que fue verificada directamente. En la proposición 3 falta información, ya que también puede suceder que haya tarjetas negras con un **2** en el anverso. En la proposición 4 también falta información, porque pueden existir tarjetas con un **2** en el anverso y ser negras o blancas al reverso. En la proposición 5 falta información por la misma razón que en la proposición 4. La proposición 6 es verdadera, pues fue verificada directamente. En la proposición 7 falta información, ya que puede haber tarjetas negras al reverso y con un **1** o un **2** en el anverso. La proposición 8 es falsa, ya que sabemos que *todas* las que son blancas al reverso tienen un **2** en el anverso.

Ejemplo III

Se tiene ahora un conjunto de tarjetas que en el anverso tienen un círculo o un triángulo, y en el reverso son rojas o verdes.

Se revisan las tarjetas y se encuentra que:

a. Todas las que tienen un círculo en el anverso, son rojas al reverso.

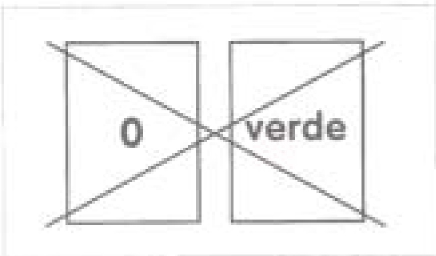
b. Todas las que tienen un triángulo en el anverso, son verdes al reverso.

Nuevamente, cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, cuáles son falsas y en dónde falta información.

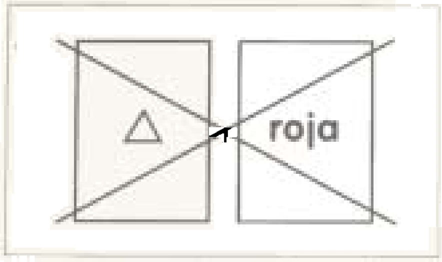
1. Si es verde al reverso, entonces tiene un triángulo en el anverso.
2. Si es roja al reverso, entonces tiene un triángulo en el anverso.
3. Si es verde al reverso, entonces tiene un círculo en el anverso.
4. Si tiene un triángulo en el anverso, entonces es roja al reverso.
5. Si es roja al reverso, entonces tiene un círculo en el anverso.
6. Si tiene un triángulo en el anverso, entonces es verde al reverso.
7. Si tiene un círculo en el anverso, entonces es roja al reverso.
8. Si tiene un círculo en el anverso, entonces es verde en el reverso.

En general, las combinaciones posibles son: círculo en el anverso y roja al reverso; triángulo en el anverso y roja al reverso; círculo en el anverso y verde al reverso; triángulo en el anverso y verde al reverso.

Al revisarlas se encuentra que *todas* las que tienen un círculo en el anverso, son rojas al reverso. Esto elimina la posibilidad de que haya tarjetas con un círculo en el anverso y verdes al reverso.



También, al revisarlas encontramos que *todas* las que tienen un triángulo en el anverso, son verdes al reverso. Esto, a su vez, elimina la posibilidad de hallar tarjetas con un triángulo en el anverso y rojas al reverso.



A diferencia del ejemplo II, aquí la información dada por a y b no es equivalente, sino que más bien se complementa para determinar que los únicos casos son: círculo en el anverso, rojas al reverso; triángulo en el anverso, verdes al reverso. (ver figura inferior)

De aquí podemos concluir que la proposición "tiene un círculo en el anverso" es equivalente a "es roja al reverso" y la proposición "tiene un triángulo en el anverso" es equivalente a "es verde al reverso". O, en otras palabras, "tiene un círculo en el anverso si, y sólo si, es roja al reverso" y "tiene un triángulo en el anverso si, y sólo si, es verde al reverso".

Como un sencillo ejercicio para el lector le pedimos que determine los valores de verdad de las proposiciones 1-8 de este último ejemplo. Observará, además, que en ningún caso falta información, pues las proposiciones a y b nos dan toda la necesaria.

A continuación, veamos cómo resolvió el caso el Dr. Watson.

Antes que nada, notemos que las proposiciones 1-4 de nuestra historia son relaciones de implicación no de equivalencia. Así, entonces, la proposición 1 nos dice que si John sirvió el desayuno a las 8:00 horas, entonces estuvo en el pueblo *toda la tarde. Sabemos a ciencia cierta* que John estuvo en el pueblo toda la tarde (proposición I), pero como no son relaciones de equivalencia no podemos asegurar, a partir de esto último, que John sirvió el desayuno a las 8:00 horas. Y por la proposición 3 no podemos asegurar que él haya sido el autor del robo.

Luego sabemos, a ciencia cierta, que Elizabeth se ausentó varias horas de la casa (proposición II); entonces ella no permaneció todo el día en la casa y, por la proposición 2, podemos afirmar que Elizabeth no lavó la ropa el día anterior. Ahora, utilizando la proposición 4, podemos concluir que ella fue la autora del robo.

Como nuestro propósito es que el lector entienda perfectamente cómo resolvió el caso el Dr. Watson y que este artículo cumpla su objetivo que es el de ayudar un poco a entender cómo operan algunos de los métodos de las matemáticas, repasaremos el proceso con más detalle.

Las proposiciones 1-4 de nuestra historia son relaciones de implicación verdaderas; por lo tanto, para cada una de ellas puede ocurrir alguna o algunas de las tres posibilidades válidas para la implicación (verdadera-verdadera, falsa-falsa, falsa-verdadera).

Sabemos a ciencia cierta que John estuvo en el pueblo toda la tarde (proposición I); esto es, la tesis de la proposición 1 es verdadera. Recordando los tres casos posibles para la implicación, la hipótesis de 1 ("John sirvió el desayuno a las 8:00 horas"), puede ser verdadera o falsa. Por lo mismo, la tesis de la proposición 3 ("él fue el autor del robo"), puede ser verdadera o falsa, y así no podemos saber si él cometió el *delito.*

Por otro lado, también sabemos, sin ugar a dudas, por la proposición II que Elizabeth se ausentó varias horas de la casa. Por lo tanto, la tesis de la proposición 2 es falsa. Escogiendo de los tres casos posibles para la implicación, donde la tesis sea falsa, solo hay un caso y es aquel en el que la hipótesis también es falsa (el caso falsa-falsa); por lo tanto, la hipótesis de la proposición 2 ("Elizabeth lavó la ropa el día anterior") es falsa, siendo verdadera la proposición "Elizabeth no lavó la ropa el día anterior". Ahora, tomando la proposición 4, vemos que el único caso en que la hipótesis es verdadera, es el caso verdadera-verdadera, esto es, la proposición "ella fue la autora del robo" es verdadera.

Es así, entonces, como el Dr. Watson halló al culpable. Por cierto, una vez recuperado el reloj, la bella viuda le manifestó a Watson que no sabía cómo darle las gracias y lo invitó a pasar el fin de semana con ella en su casa de campo. Por su parte, el Dr. Watson aceptó, y una vez allí pudo mostrarle a la hermosa mujer varias maneras mediante las cualles ella pudo hacer patente su agradecimiento...

Bibliografía

1. Ferrater Mora, J. y H. Leblank, *Lógica matemática*, Fondo de Cultura Económica, México.
2. Fregoso, A., *Los elementos del lenguaje de la matemática*, CEMPAE, México, 1974.
3. Zubieta Russi, G., *Manual de lógica para estudiantes de matemáticas*, Edit. Trillas, México.

José Luis Álvarez García: Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM.