El que parte y reparte se queda con la mejor parte...

CARLOS BOSCH GIRAL

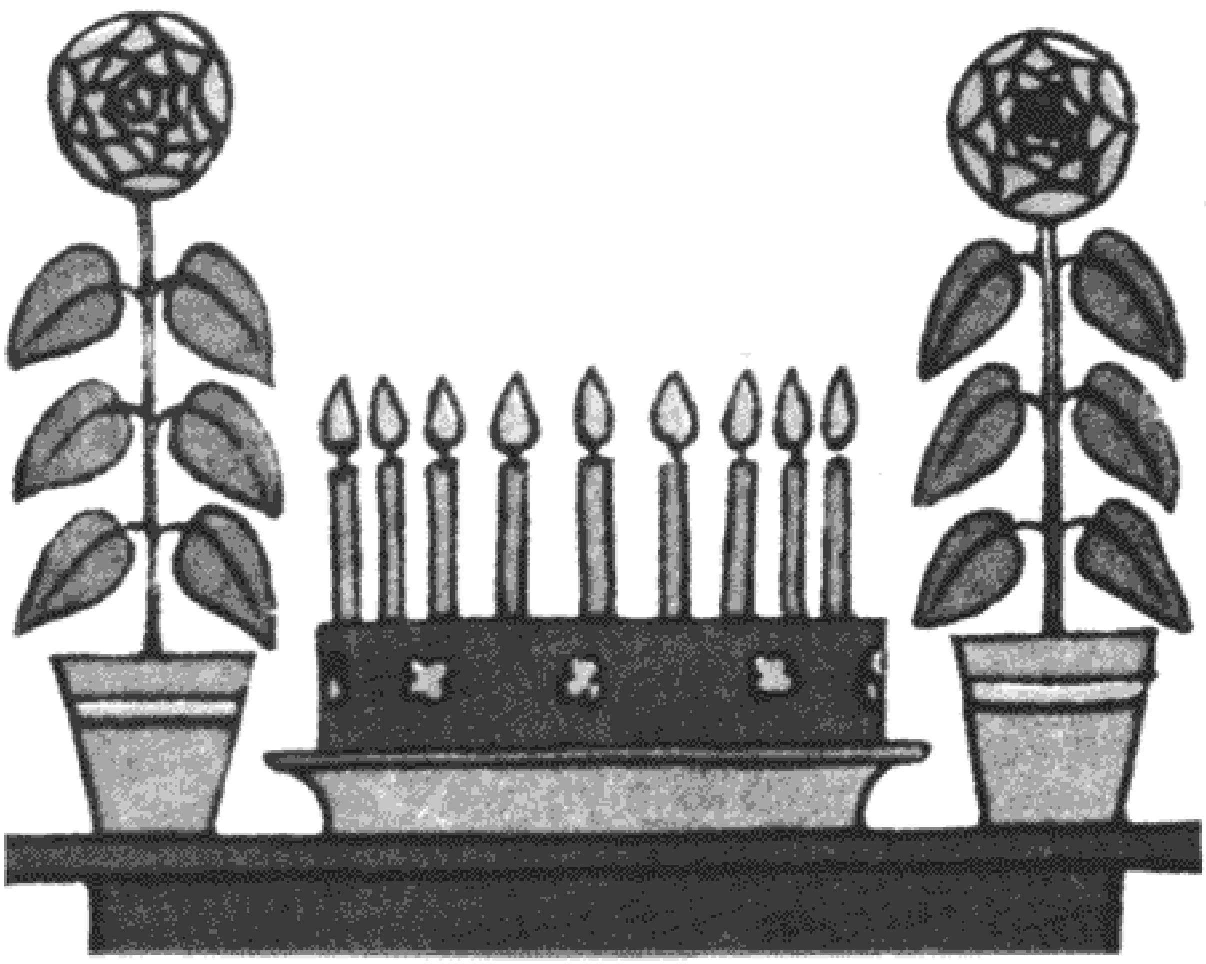
En cualquier sociedad es una práctica muy normal el tener que compartir ciertas cosas. Es muy deseable que la forma en que se reparten las cosas sea considerada justa para las personas involucradas.

Una forma de hacer repartos es de manera autoritaria, en la cual un individuo imparcial o un equipo o una agencia asigna la parte que corresponde a cada individuo. Por ejemplo una Comisión de la Federación Internacional de Futbol Asociación, decide cuántos equipos representarán a cada zona en el campeonato mundial de futbol (CONCACAF está representada por dos, África, dos, América del Sur, 3, etc.). Otro ejemplo sería el hecho de que para efecto de satélites el cielo se reparte entre los países de la siguiente manera: la porción de cielo le pertenece al país que puso en órbita primero a un satélite en esa posición.

Otra forma de hacer un reparto, es hacer que intervengan las partes afectadas de manera activa, decidiendo cómo hacer el reparto. Se trata de encontrar un método que haga que cada una de las personas esté de acuerdo en que es justo lo que obtuvo en el reparto. Es este tipo de enfoque el que nos va a interesar aquí. Empezaremos con el típico problema de repartir un pastel.

Este problema interesó a los matemáticos a principios de este siglo. En 1948 el matemático polaco Hugo Steinhaus escribió en uno de sus apuntes:

Carlos Bosch: Instituto Tecnológico Autónomo de México.

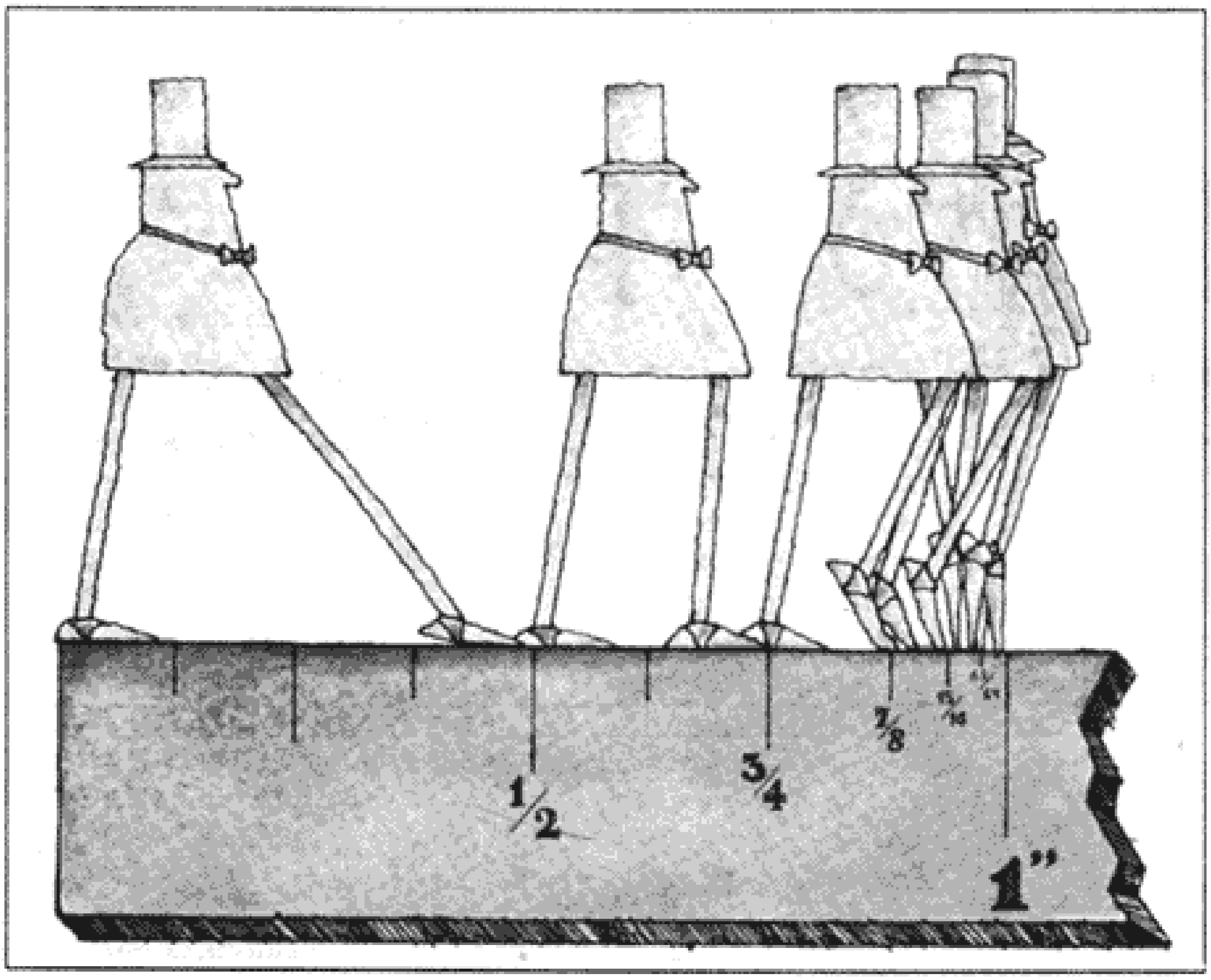


"Al haber encontrado una solución para el problema del reparto del pastel entre tres personas, les propuse la generalización a mis compañeros B. Knaster y S. Banach." Los tres fueron matemáticos de excelente reputación internacional.

Poco después Steinhaus escribió la solución que Knaster y Banach encontraron para el reparto entre *n* personas y en el mismo artículo escribió un método de la distribución de herencias del que también hablaremos posteriormente.

El problema de los repartos tiene distintos aspectos y formas. El matemático inglés D.R. Woodall y el americano W. Stromquist, han probado que el pastel puede ser repartido entre personas, de tal forma que cada persona prefiere su propio trozo sobre cualquier otro. Es decir que cada persona cree tener la mejor parte; cree que no hay otra persona que tenga más que él. Desafortunadamente esta prueba no incluye un algoritmo que indique cómo obtener los pedazos, sólo es una prueba de existencia.

El matemático americano T. Mill ha probado que si *n* países tienen frontera con un pedazo de territorio en disputa, se puede dividir éste en *n* pedazos, de tal manera que a cada país se le puede



dar una parte que tiene frontera con su país y que considera al menos $1/n$ del territorio en disputa. Aún quedan muchos problemas de repartos por ser resueltos.

Algunos repartos

Dos personas

Supongamos que dos personas tienen que compartir un pastel. Todos conocemos un método con el cuál ambos quedarán satisfechos. Es el de que una de ellas corte el pastel de manera que crea que lo ha dividido en dos partes iguales y que sea la otra persona la que elija el pedazo que quiere.

La persona que elije está contenta, pues de los dos pedazos ha optado por el mayor, así que tiene al menos la mitad del pastel y la otra persona al haber cortado el pastel lo ha hecho de la manera más exacta posible ya que sabe que él no elije primero así que el pedazo restante es exactamente un medio respecto a su criterio.

Antes de continuar hagamos claras algunas de las premisas que estamos suponiendo para resolver este problema.

a. Para poder pensar en un reparto que a todas las personas involucradas les parezca justo, debe considerarse la opinión de cada persona, que por cierto puede diferir de una a otra. Para repartir algo de manera "justa" cada persona debe obtener una parte que ella considere justa.

b. Cada persona tiene la capacidad de dividir un objeto en n partes que ella considera iguales.

c. Si un objeto es dividido en partes, cada persona puede dar un valor fraccional (real) a esos pedazos, de manera que al sumar todas esas fracciones (reales) se obtiene uno.

d. El valor que una persona le da a un pedazo, puede involucrar algo más que el simple tamaño del pedazo.

Estas son algunas suposiciones que nos permitirán atacar mejor nuestro problema. Ellas juegan el mismo papel que los axiomas en geometría.

Tres personas

Método 1. El cuchillo movedizo

El siguiente método produce un reparto justo de un (pedazo de) pastel entre tres personas.

Supongamos que un cuchillo se mueve continua y lentamente sobre el pastel. Cualquiera de las tres personas involucradas puede decir "corta" y en ese instante el cuchillo cortará el pastel, adjudicándose la parte cortada a la persona que dijo "corta". Este método garantiza que cada persona recibirá la parte del pastel que considera justa a su juicio.

Esta es tal vez la solución más sencilla del problema. Sin embargo hay otras soluciones que también nos dan un algoritmo. Veamos otra manera justa de repartir un pastel entre tres personas.

Método 2

Por facilidad llamaremos a las tres personas Sofía, Pablo y Claudia. El algoritmo es el siguiente:

1. Sofía corta el pastel en dos partes que piensa son mitades.
2. Pablo elije y Sofía se queda con la otra mitad.
3. Ambos, Pablo y Sofía dividen sus pedazos respectivos en tres partes que consideran iguales.
4. Claudia elije una tercera parte de cada uno.
5. Pablo y Sofía se quedan con lo restante.

Este es un algoritmo muy elegante para repartir el pastel entre tres personas de manera que todas queden satisfechas pensando que obtuvieron al menos una tercera parte del pastel.

Veamos que eso es en efecto cierto, que tanto Pablo, Sofía como Claudia están contentos con su parte.

Sofía obtiene exactamente 2/3 de 1/2 según su criterio que es 1/3.

Pablo obtiene 2/3 de al menos 1/2 a su juicio, así que se queda con al menos 1/3.

Ahora viene el caso de Claudia de quien no sabemos qué piense del primer corte que hizo Sofía. Si piensa que el corte no da mitades sino que un pedazo es a y el otro $1-a$ entonces obtiene al menos

$$1/3a + 1/3\,(1-a) = 1/3 - 1/3a = 1/3$$

según su criterio. Si cree que el corte dio mitades tiene al menos 1/3 del pastel.

Método 3

Veamos una posibilidad más:

1. Sofía corta el pastel en tres pedazos que son exactamente tercios según su criterio.
2. Pablo y Claudia deciden si esa división es justa o no y tabulan los pedazos que aceptarían o no. Por ejemplo

	Pedazo 1	Pedazo 2	Pedazo 3
Sofía	sí	sí	sí
Pablo	sí	no	no
Claudia	sí	sí	no

Tenemos ahora dos casos; una "matriz" como la anterior hace que los tres pedazos se puedan asignar a cada persona, en cuyo caso Sofía toma el pedazo 3 Pablo el 1 y Claudia el 2.

La otra posibilidad es tener una matriz en la que Pablo y Claudia sólo aceptan tomar un pedazo y éste sea el mismo, por ejemplo

	Pedazo 1	Pedazo 2	Pedazo 3
Sofía	sí	sí	sí
Pablo	no	no	sí
Claudia	no	no	sí

En este caso asignemos a Sofía el pedazo 1. Pablo y Claudia piensan que el pedazo 2 y el 3 son más de 2/3 del pastel, ya que ninguno quiere tomar el pedazo 1. Ahora nos queda por repartir los pedazos 2 y 3 entre Pablo y Claudia, para lo cual le pediremos a uno de ellos que corte los pedazos en mitades y al otro que escoja.

Es claro que con este método todos creerán que han obtenido al menos 1/3 del pastel.

Observe que al usar este método no hay más de cinco cortes y sin embargo en el método anterior se usaron exactamente cinco cortes.

Por supuesto que existen otros métodos, pero estos tres son suficientes para nuestro propósitos.

Extensión a n *personas*

El *método 1* se puede extender fácilmente a cuatro personas pidiendo que la persona que se quiere adjudicar una parte avise cuando considere que tiene una n-ésima parte del pastel.

El *método 2* también se puede extender. Veamos cómo se extiende a 4 personas. A corta en mitades, B elije un pedazo. A y B parten sus pedazos en 3 partes y C toma un pedazo de A y otro de B. Así que A, B y C tienen según su criterio al menos 1/3 del pastel. Ahora cada quien corta sus dos pedazos en 4 partes cada uno, es decir que se obtiene $6 \times 4 = 24$ pedazos. D elije dos pedazos de cada una de las partes de A, B y C, así que cada quien tiene 6 partes. A, B y C tienen ahora 6/8 de al menos 1/3, es decir $6/8 \times 1/3 = 2/8 = 1/4$, A, B y C tienen según su criterio al menos 1/4 del pastel. No es difícil argumentar que D también tiene al menos 1/4 del pastel.

El *método 3* también se puede extender y para esto exhibiremos únicamente un ejemplo:

	Parte 1	Parte 2	Parte 3	Parte 4
A	sí	sí	sí	sí
B	sí	sí	no	no
C	sí	no	no	no
D	sí	no	no	no

Demos la parte 4 (o la 3) a A y que B, C y D procedan como en el método 3 para tres personas con las partes sobrantes. O bien demos la parte 4 a A y la 2 a B y que C y D se repartan las partes 1 y 3.

Estos tipos de repartos también se aplican a otro tipo de objetos, además de los pasteles. Sin embargo los coches y las casas son considerados indivisibles. Los métodos usados para dividir el pastel, usualmente no se pueden usar para objetos indivisibles ¡Necesitamos nuevas ideas!

Reparto de herencias

Lo más usual en este tipo de situaciones es que la gente se pelee. Otra posibilidad es que nombren a un asesor externo que valúe y venda los bienes y luego reparta el dinero entre los herederos. Sin embargo hay otras posibilidades y en algunos casos cada heredero pensará que obtuvo según su criterio más de una n-ésima parte si el reparto se hace entre n personas.

Un método para hacer repartos de bienes lo ilustraremos en el ejemplo siguiente. En este método cada persona indica el valor que cree que tiene cada cosa en un papel sin que los demás sepan. La persona que evalúe más alto un bien se quedará con él. Así que el valor total de la herencia estará determinado por la suma de las evaluaciones de cada persona y podrá ser diferente, dependiendo de cada una. Un reparto justo deberá de hacerse con el avalúo total de cada persona.

Ejemplo. Supongamos que Alfredo, Bárbara y Carmelo se están repartiendo un piano, un coche, un barco, un terreno y una suma de 60 millones de pesos. Recordemos que la persona que valúe más alto alguna de las cosas se quedará con ella. Luego se harán ajustes con el dinero líquido para que cada persona obtenga a su juicio una parte justa de la herencia.

Supongamos que las evaluaciones las hicieron de acuerdo con la tabla 1.

Observamos que cada persona recibe un poco más de 5 1/3 millones de lo que ella considera ser 1/3 del total. Así que cada uno recibe más de lo que esperaba desde su punto de vista.

Si entre los bienes no se encuentra una suma grande de dinero, entonces se puede proceder básicamente de manera similar y las personas a las que se les asignen objetos por más de su parte, deberán pagar en efectivo la parte excedente.

Por supuesto que este método también funciona para el caso en que los herederos no tienen todos el mismo porcentaje de la herencia.

Es evidente que este método se puede falsear y uno de los problemas que tiene es el de que alguna de las personas vea las evaluaciones de otra, o bien que dos de ellas se pongan de acuerdo, de modo que la suma de sus evaluaciones sea muy grande comparado con la de las otras personas involucradas, con lo cual ellas recibirán más y las otras personas menos.

Un poco más sobre repartos desde el punto de vista matemático

Hagamos aquí un poco de abstracción y denotemos por X a lo que se va a repartir, por ejemplo el pastel, y por $P_1, ..., P_n$, a las n personas que participan en el reparto. El problema consiste en encontrar una partición X tal que $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$, de tal forma que la persona P_i recibe la porción X_i y que P_i piense que recibió una parte justa para $i = 1, ..., n$.

Como siempre la pregunta de qué es justo es importante de resolver, sin embargo esto es muy preciso al hacerlo desde el punto de vista matemático.

Supongamos que cada persona P_i determina una función f_i, de tal manera que f_i (Y) indica la fracción (real) del pastel que se asigna a Y, según el criterio de la persona P_i. Así que $0 \leq f_i(Y) \leq 1$ y si $Y_1 \cup ... \cup Y_h$ es una partición de X, se tiene

$$f(Y_1) + ... + f(Y_h) = 1$$

Justo puede querer decir lo siguiente:

a. $f_i(X_i) \geq 1/n$ para toda i. Es decir que cada persona va a tener al menos un eneavo del pastel, según su propio criterio.

b. $f_i(X_i) > 1/n$ para toda i; cada persona piensa que obtendrá un pedazo mayor de un eneavo del pastel.

c. $f_i(X_i) \geq f_i(X_j)$ para toda i, j. Cada persona piensa que obtendrá una porción al menos tan grande como cualquier otra persona.

d. $f_i(X_j) = 1/n$ para toda i, j. Cada persona piensa que todas las porciones son exactamente iguales.

Para resolver el problema *a* existen varios algoritmos. Para *b*, si todas las funciones f_i son iguales es imposible. Si al menos dos funciones son diferentes hay pruebas de existencia para toda n.

Para el caso *c* hay pruebas de existencia y sólo para $n \leq 3$ se conocen algoritmos.

Para *d* hay pruebas de existencia para toda n.

Para el caso *a* tenemos un método que incluso se extiende para n personas, el método 2 de la sección de algunos repartos. Si el algoritmo se extiende para n personas se obtienen $n!$ (n factorial) pedazos, lo cual es muchísimo.

En 1948 Hugo Steinhaus, después de que S. Banach y B. Knaster plantearon una solución general les indicó: "Hay problemas matemáticos interesantes si uno desea determinar el mínimo número de cortes para esta situación."

A ese respecto el menor número de pedazos que se conocen para resolver el problema a, es

$$n([\log_2 n] + 1) - 2\log_2 n + 2.$$

Para terminar veamos un algoritmo para el caso c, con tres personas. Este algoritmo se debe a Selfridge.

Primero, pidamos a P_1 que corte X en tercios, es decir

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$
$$\text{y } f_1(X_1) = f_1(X_2) = f_1(X_3) = 1/3$$

Segundo, supongamos que P_2 considera que

Tabla 1.

	A	B	C
Piano	18	15	15.5
Coche	26	15	20.5
Barco	40	38	43
Terreno	60	64	50
Dinero	60	60	60
Suma de las evaluaciones	204	192	189
Reparto justo 1/3 de la suma	68	64	63
Objetos asignados	coche / piano	terreno	barco
Valor de los objetos	44	64	43
Complemento en dinero	24	–	20
Reparto preliminar	68	64	63
Reparto del dinero sobrante	5 1/3	5 1/3	5 1/3
Reparto final	73 1/3	69 1/3	68 1/3

$$f_2(X_1) \geq f_2(X_2) \geq f_2(X_3)$$

Así que le pediremos a P_2 que corte el exceso E de X_1 de tal manera que

$$f_2(X_2) = f_2(X'_1) \text{ y } X_1 = E \cup (X'_1)$$

separemos el pedazo E por el momento (figura 1).

Tercero, pidamos a P_3 que elija un pedazo X'_1, X_2 o X_3.

Si P_3 elije X'_1 entonces demos X_2 a P_2 y X_3 a P_1

Si P_3 elije X_2 entonces demos X'_1 a P_2 y X_3 a P_1

Si P_3 elije X_3 entonces demos X'_1 a P_2 y X_2 a P_1

Observemos que con los pedazos X'_1 X_2 y X_3 todas las personas piensan que no hay alguna que tenga un pedazo más grande que el suyo.

Cuarto, numeremos ahora a las personas de la siguiente forma. El que tenga X'_1 será A, P_1 será B y la otra persona será C. Esto es para repartir el pedazo E.

Quinto, pidamos a C que corte E en tercio $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, de modo que $f_c(E_1) = f_c(E_2) = f_c(E_3)$. Pidamos a A que escoja primero, luego a B y finalmente C se quedará con el último pedazo.

Analicemos ahora la situación:

A piensa que todos tienen menos que él ya que elije primero.

B está en una situación similar, ya que B hubiera dado incluso todo el pedazo E a A sin sentir que A tuviese más que él. Respecto a C, como B elije su pedazo antes que C, también tendrá al menos tanto como C.

C también está contento ya que él fue quien cortó el pedazo E.

Desde el punto de vista matemático queda mucho por investigar y cualquier avance será bienvenido, sobre todo si este es en el sentido de encontrar algoritmos.

Conclusiones

Comienzan a hacerse modelos matemáticos en las ciencias sociales con grandes resultados. No solamente se están dando nuevos puntos de vista de los problemas sociales, sino que las mismas matemáticas se están agrandando con ello. La aplicación de las matemáticas a las ciencias sociales tardó, debido a que tradicionalmente se las consideraba de difícil cuantificación. Sin embargo las matemáticas se aplican, cada vez más, a distintas áreas, lo que las hace más atractivas, ya que se está obteniendo mucha información que es accesible a muchas más personas, que lo que eran las matemáticas más tradicionales o las áreas más "puras". Éstas eran entendidas y apreciadas después de varios años de entrenamiento en matemáticas avanzadas. Sin embargo para estar seguro de que todo funciona bien, siguen siendo necesarias las pruebas más técnicas y conforme se desarrollen las nuevas áreas, éstas serán cada vez más inevitables.

Por otra parte esto abre un gran panorama para todas las carreras relacionadas con las matemáticas. Ya que son carreras nuevas que requieren de una preparación distinta a las tradicionales por ejemplo: ya en varias universidades

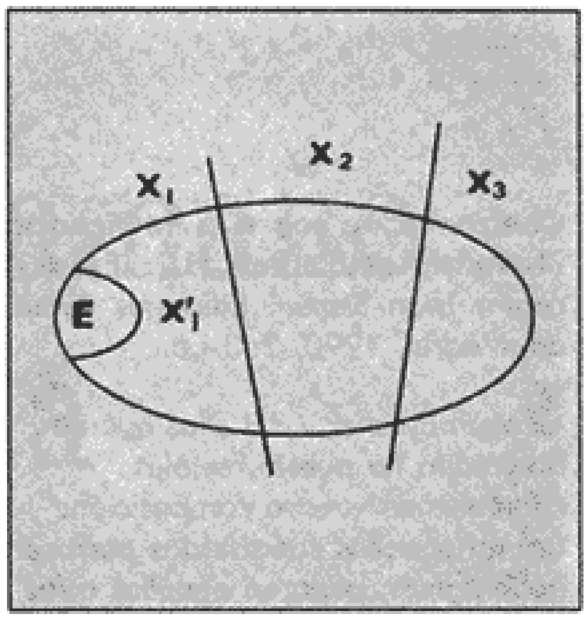


Figura 1.

no es el cálculo diferencial e integral el tema central de los cursos de matemáticas. Es un momento importante para recibir y ofrecer orientaciones diferentes en matemáticas. Se está trabajando en diferentes áreas donde se han encontrado muchos puntos en común. A veces el éxito se debe al uso de la computadora, la cual hay que saber usar y conocer sus posibilidades y limitaciones. En conclusión, se abre un gran porvenir para los jóvenes que quieren estudiar algo relacionado con matemáticas.◆

Agradecimientos

Quiero agradecer a Magali Folch Gabayet y a Claudia Gómez Wulschner las correcciones que me indicaron al leer el manuscrito final. También a Silvia Torres por descifrar mi manuscrito y ponerlo en forma legible, así como a todas las personas que laboran para esta revista por la ayuda que me brindaron.

Bibliografía

1. Dubins L. E. and E. M. Spanier, 1961, "How to cut a cake fairly", *Amer. Math. Monthly* 68: 1-17.
2. Nennett, S., D. DeTemple, M. Dirbs, B. Newell, J. Robertson, B. T. and Fair Division preprint.
3. Robertson, J. and Webb W. B. Tyns *Minimal number of cuts for fair Division*, por aparecer.
4. Stromquist, W., 1990, "How to cut a cake fairly", *Amer. Math Monthly* 87: 640-644.
5. Woodall, D. R., 1980, "Dividing a cake fairly". *J. of Math. Anal. and App.* 78: 233-247.
6. Woodall, D. R., 1986, "A note on the cake division problem", *J. of Comb. Theory Series* A 43: 300-301.