De cero a… Aleph: Los Distintos Infinitos

Registro: CIN2018A20145

Escuela Tomás Alva Edison

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

Autores: Karen Arteaga Mendoza (317520589), Emilio Piña Fèlix (317594148)

Asesores: Said Hernández Villegas (16082146), Leonel Magaña Mejía (03024829)

Área: Ciencias Fisicomatemáticas y de las Ingenierías

Disciplina: Matemáticas

Investigación: Documental

Febrero 2018

Resumen ejecutivo

Resumen

Es posible identificar distintos tamaños de infinito; lo que motiva la pregunta, y cómo objetivo identificar los tamaños que tienen los infinitos de los conjuntos de números que se usan más en lo cotidiano (naturales, enteros, racionales y reales). Se pretende ubicar a qué tamaño de infinito pertenecen estos conjuntos de números, así como comparar las diferencias entre los tamaños de infinitos Aleph cero y uno, partiendo de la propiedad de dominancia.

Palabras clave: infinito, conjunto, dominancia, Aleph cero, Aleph uno.

Abstract

It is possible to identify different sizes of infinities. This statement motivates leads to the objective of identifying the size of infinity where the commonly used sets of numbers belong (naturals, integers, rationals and reals). It is pretended to locate and compare the sizes of infinities were this sets belong, as well as differentiate Aleph null from Aleph one with the dominance property .

Keywords: infinity, set, dominance, Aleph null, Aleph one.

En la actualidad, el concepto de infinito no se entiende con facilidad ya que es relativamente nuevo y es un tema de gran controversia en el mundo de las matemáticas. De hecho, el infinito, aunque ya se conocía como un concepto abstracto desde los griegos, no es hasta el siglo XIX que se olvida de ese miedo a la infinidad y se empieza a estudiar. Las civilizaciones antiguas no hacían uso de la palabra infinito por miedo a lo inmenso e incontable. El término infinito se ha ocupado desde hace mucho tiempo en el siglo VI a.C.; pero no fue hasta el siglo XIX cuando Georg Cantor se adelantó con ideas no aptas para su época y rompió los ideales que se tenían sobre lo inconmensurable.

Comprender lo que es el infinito es un desafío para la lógica y la inteligencia. Los humanos pensamos de manera concisa y directa, al imaginar algo que no termina la mente se vuelve un caos porque es imposible visualizar la infinidad a menos que sea como un concepto abstracto. En este reto de pensar en infinitos es en donde salen las dudas del tamaño, si solo es uno, o si hay varios y tienen diferentes tamaños. Con esta investigación buscamos dejar en claro que existe el infinito como concepto abstracto. También buscamos explicar que un conjunto infinito puede tener menos elementos que otro conjunto infinito. Por otra parte, mostrar a qué infinito pertenecen los números que utilizamos día con día (naturales, enteros, racionales y reales); pretendemos hacer más comprensible lo que es un infinito para que, en algún futuro cercano, se le pueda dar una aplicación a lo que hoy nos cuesta trabajo concebir. La importancia de esta investigación teórica radica en que al entender en qué tamaño de infinito se encuentran los números que hoy conocemos le da una justificación a la forma en la que éstos se comportan y así es posible fundamentar la materia de matemáticas como la conocemos hoy.

Resultados destacados

Esta investigación es meramente teórica e informativa, pues basaremos nuestros datos en antecedentes, teorías y teoremas ya formulados. Pretendemos definir lo que es el infinito y dejar claro que existen diferentes tamaños de conjuntos infinitos, al mismo tiempo, buscamos explicar y definir los conceptos de cardinalidad, dominancia, inyectividad y suprayectividad; para así tener la certeza de que lo que estamos mostrando se entiende bien. También se planea diferenciar entre el tamaño de infinito que ocupan los números que usamos día con día: naturales, enteros, racionales y reales, llegando a la conclusión que el tamaño de los números naturales N, números enteros Z y números racionales Q es el mismo y lo llamaremos Aleph 0; y también mostraremos que el infinito que forman los números reales es estrictamente mayor al de los anteriores, encontrando un nuevo cardinal llamado continuo C que podemos asociar con Aleph 1. Por último, mostraremos en qué se basa la dominancia del conjunto infinito de los reales hacia el conjunto de números naturales.

Introducción

Planteamiento del problema

Definir lo que es el infinito es un reto para lo abstracto y comprensión de la realidad. Aunque para la mayoría de la gente el concepto infinito se refiere a una cantidad que no tiene fin o límite; desde el punto de vista de las ciencias exactas, en especial las matemáticas, existe una diferente noción de la infinidad de acuerdo al tipo de abstracción matemática con el que tratas de comprenderla. Es decir, no es lo mismo concebir al infinito en la lógica de los números naturales, racionales, o reales.

A finales del siglo XIX y principios del XX se comenzó a formalizar la teoría de conjuntos que daría sustento a todas las matemáticas estudiadas hasta ese momento. El concepto de infinito no se había estudiado de lleno hasta antes de Georg Cantor, quien planteó que existen diferentes tamaños de infinitos, como lo son Aleph cero y Aleph uno, durante un tiempo en que surgieron nuevos conceptos al formalizar la teoría de conjuntos como sustento de las matemáticas. En cada uno de estos dos conjuntos se encuentran diferentes números dependiendo de su cardinalidad. Nos queremos enfocar en estos dos infinitos para que podamos contestar la pregunta: ¿qué tamaño de infinito presentan los conjuntos de números que utilizamos de forma cotidiana?

Objetivos

Por medio de la teoría de conjuntos, en particular de dominancia y cardinales, mostrar que los conjuntos de números enteros, racionales y reales, que son los que utilizamos cotidianamente, representan diferentes tamaños de infinitos; es decir, diferentes cardinales. Por consiguiente, ubicar a qué tamaño de infinito pertenecen, ya sea Aleph 0 o Aleph 1, los conjuntos de números que utilizamos en la vida cotidiana que son los conjuntos infinitos de números enteros, racionales y reales. Finalmente, tenemos como objetivo encontrar las diferencias entre los tamaños de infinitos partiendo de la dominancia en conjuntos para así mostrar cuál es más grande.

Fundamento teórico

Antecedentes

El concepto de infinito viene de las civilizaciones griegas, cuando la filosofía y las matemáticas estaban muy vinculadas. En el siglo VI a.C. en Grecia existía un pensador llamado Pitágoras, la escuela de Pitágoras basaba sus matemáticas en los números naturales los cuáles eran la esencia de todo. Se creía que los números naturales y la razón de dos naturales expresada (racionales) eran la esencia de todo porque eran medibles y contables, aparte de que hacían progresar a las matemáticas y eran la base. El descubrimiento de números irracionales desconcertó de gran manera a estos pensadores, tanto que lo guardaron en secreto, ignorando o inconmensurable y con un cierto horror a lo infinito.

Por el siglo V a. C. apareció Zenón, quien planteó sus paradojas sobre lo infinito e infinitesimal. Zenón plantea sus teorías sobre movimiento y continuidad en una época en donde hay una gran duda sobre el tiempo y espacio. Básicamente él argumentaba que un espacio X se podía dividir infinitas veces lo que hacía imposible que se pudiera alcanzar el final. Zenón planteó cuatro paradojas en donde ponía diferentes problemas y explicaba la imposibilidad de existir en un espacio que puede ser divisible infinitas veces. Estos argumentos contradecían las ideas lógicas de los matemáticos de la época por lo que el término “infinito” siguió siendo ignorado.

El concepto y definición del infinito fue excluido por muchos matemáticos y no hubo un gran avance hasta el siglo XIX con Georg Cantor. Por 1847 Cantor se encontraba estudiando los números irracionales cuando apareció uno de sus primeros trabajos sobre conjuntos. Cantor revolucionó las matemáticas con sus ideas avanzadas para su siglo, las cuales planteaban que existen conjuntos infinitos numerables y no numerables. Él argumentaba que existen infinitos con diversos tamaños, unos más grandes que otros (cardinalidad). Él planteó por primera vez la idea de “transfinito”, que representarían a los cardinales de los distintos conjuntos infinitos, rechazando la idea de un infinito como totalidad y mejor introdujo el concepto de infinito como una cantidad de objetos que no tiene fin pero pertenece a un conjunto. Cantor reflexionó sobre el infinito y transfinito para darle una base filosófica y lógica en lo que se refiere a los conjuntos infinitos. A Georg Cantor se le atribuye la Teoría de Conjuntos, la cual explica y estudia las propiedades de las colecciones de objetos finitos o infinitos y se apoya de la lógica. Por último, Cantor plantea un problema que le es difícil resolver el cual años después es demostrado finalmente por un alumno suyo y el cual da resultado a lo que hoy se conoce como Teorema Cantor-Shröder- Bernstein.

Definición de términos

Definición 1: Un “conjunto” es una colección de objetos considerada como un todo.

Definición 2: El producto cartesiano de dos conjuntos AxB es el conjunto formado por las parejas oredenadas de la forma (a,b) de tal manera que a es elemento del conjunto A y b es elemento del conjunto B, es decir, $AxB=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$.

Definición 3: Una “relación” entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano AxB y se denota por $R:A\rightarrow B$. Llamaremos dominio al conjunto A y contradominio al conjunto B.

Definición 4: Una “función” entre dos conjuntos A y B es una relación que cumple cada elemento del dominio está relacionado con algún elemento del contradominio y sólo con uno. Las funciones se denotaran por $f:A\rightarrow B$ y los valores por f(a).

Definición 5: El “rango” de una función es el subconjunto del contradominio formado por los elementos que si se relacionan con algún elemento del dominio, es decir, $Ran=\{f(a)|a\in A\}$.

Definición 6: Una función es “inyectiva” si cada elemento del rango sólo se relaciona con un elemento del dominio, es decir, $f(a)=f(b)\rightarrow a=b$.

Definición 7: Una función es “suprayectiva” si todos los elementos del contradominio pertenecen al rango de la función.

Definición 8: Una función es “biyectiva” si es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Definición 9: La “cardinalidad” o el “cardinal” de un conjunto A. denotado por |A|, es el número de elementos que pertenecen al conjunto.

Definición 10: Dos conjuntos A y B son “equipotentes” si tienen la misma cardinalidad, es decir, |A|=|B|.

Definición 11: Un conjunto es “finito” si tiene como cardinal a un número natural.

Definición 12: Un conjunto es “infinito” si no es finito.

Definición 13: Un conjunto A “domina” a un conjunto B, denotado por $A \succ B$, si existe una función $f : B \rightarrow A$, que es inyectiva.

Definición 14: Los “números transfinitos” son los cardinales que presentan los conjuntos infinitos.

Definición 15: El primer número transfinito lo llamaremos “Aleph 0”.

Definición 16: El segundo número transfinito que corresponde al siguiente tamaño de infinito lo llamaremos “Aleph 1”

Marco teórico

La teoría de conjuntos agrupa los números en:

- Reales: R = { N, Z, Q, I}
- Naturales: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}
- Enteros: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}
- Racionales: Q = $\left\{ \frac{a}{b} \vee a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$
- Irracionales: I = R\Q

El concepto de “conjunto” es difícil de definir, pues hay varias definiciones que se adaptan al nombre según la materia que se estudie. Un conjunto puede ser un agrupamiento, colección o grupo de otros conjuntos. Sin embargo, en este trabajo nos acercaremos a la definición de conjunto como se hace en el libro “Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias” (Amor Montaño, 2011)

> Un conjunto es una colección de objetos considerada como un todo; es decir, considerada como una unidad… Los objetos que pertenecen a un conjunto se

llaman sus elementos y estos pueden ser cualquier tipo de objetos que no sean colecciones . (p.1)

El término Aleph (primera letra del alfabeto hebreo) es un símbolo que se usa para referenciar a la cantidad de elementos que se encuentra dentro de un conjunto infinito. Siendo Aleph cero el cardinal infinito más pequeño y Aleph uno el siguiente. Se debe dejar en claro que el Aleph no expresa orden o lugar, sino cardinalidad o número de elementos.

Los número que usamos (N, Z, Q, R) se dividen en contables (Aleph cero) y no contables (Aleph uno). Un infinito contable es aquel que se puede organizar de tal forma que haya una función biyectiva de sus elementos con los elementos del conjunto de los naturales. Un infinito no contable es aquel que no tiene funciones biyectivas que unan sus elementos con el de los números naturales.

Cantor demostró en su teorema que cualquier conjunto que se pudiera biyectar con el de los números naturales tendría cardinal Aleph cero. Esto significa que cualquier conjunto en el que sus elementos se puedan poner uno a uno con los número naturales tendrán los mismos elementos que el conjunto infinito de los naturales; o sea, los números que usamos a diario para contar. Cantor menciona que los conjuntos de enteros y racionales son equipotentes con los naturales y cardinal Aleph cero.

Hipótesis

Los conjuntos de números naturales N, enteros Z y racionales Q son equipotentes, con el mismo tamaño de infinito de cardinal Aleph cero. El conjunto de números reales R domina al de naturales, enteros y reales, con un tamaño de infinito mayor y cardinal Aleph uno.

Metodología

Teorema 1. El conjunto de los números naturales N y el conjunto de los números enteros Z son equipotentes.

Demostración: Como mencionamos antes, el demostrar que dos conjuntos sean equipotentes implica encontrar que sus cardinalidades son iguales, es decir, |N|=|Z|, para lo que construiremos una función biyectiva entre ambos conjuntos.

Sea $f: Z \to N$ una función definida por $f(n)=\begin{cases} -2n, si\, n \leq 0 \\ 2n-1, si\, n>0 \end{cases}$, ahora mostraremos que es biyectiva:

1. Primero para mostrar que la función es inyectiva tomamos dos valores f(a) y f(b) tal que f(a)=f(b), entonces tenemos tres casos:
   a) f(a)=-2a y f(b)=-2b, por lo que -2a=-2b, y por lo tanto a=b
   b) f(a)=2a-1 y f(b)=2b-1, por lo que 2a-1=2b-1, entonces 2a=2b y a=b

   con lo que mostraríamos que la función f es inyectiva.

2. Ahora para mostrar que la función es suprayectiva, consideramos un número natural n y construiremos un z en los enteros Z talque f(z)=n, por lo que analizaremos los siguientes casos:
   a) Si n es par, entonces proponemos z=-n/2 que sería negativo, por lo que f(z)=-2z=-2(-n/2)=n
   b) Si n es impar, entonces proponemos z=(n+1)/2, por lo que f(z)=2((n+1)/2)-1=n+1-1=n

   Probando así que la función es suprayectiva.

Entonces f resulta ser una función biyectiva y por lo tanto |N|=|Z|.

Para probar la siguiente equipotencia es necesario utilizar un resultado propuesto por Cantor y resuelto tiempo después que propone equipotencia a partir de dominancia entre conjuntos.

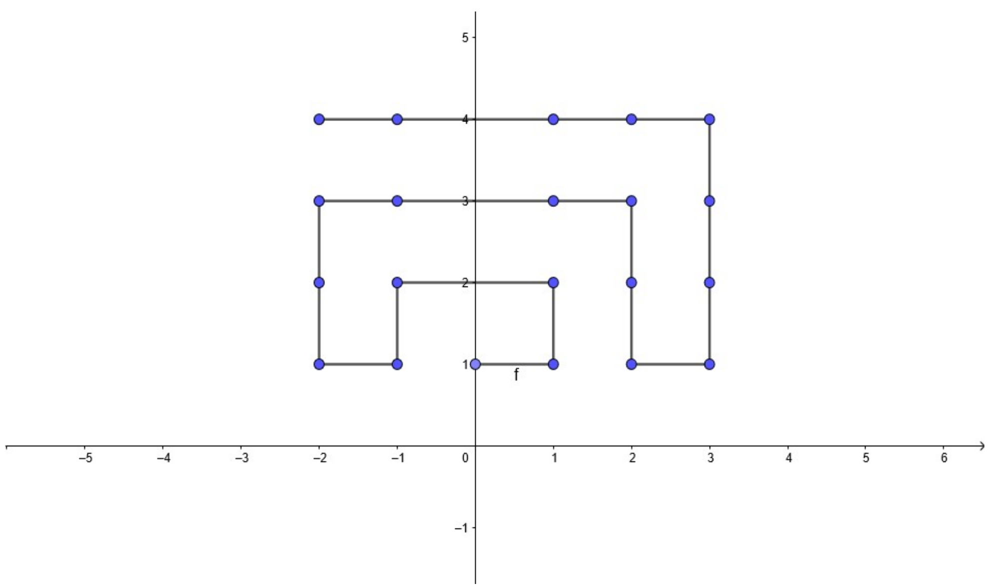
Teorema 2 (Cantor-Bernstein): Si se tienen dos conjuntos A y B de tal manera que A domina a B y B domina a A, $A \geq B \; y \; A \leq B$, entonces A y B son equipotentes |A|=|B|.

El teorema enunciado es una herramienta muy útil al trabajar con números transfinitos ya que en muchas ocasiones probar que dos conjuntos son equipotentes por medio de una biyección resulta una tarea prácticamente imposible, pero simplemente es necesario construir un función inyectiva del primer conjunto al segundo, y una segunda función inyectiva que vaya del segundo conjunto al primero para mostrar la igualdad en cardinalidad.

Teorema 3: El conjunto de los número naturales N y el conjunto de los números racionales Q son equipotentes, |N|=|Q|.

Demostración: Construiremos entonces dos funciones que nos permitan demostrar amabas dominancias.

1) La primer función se conoce como una función inclusión ya que al ser N un subconjunto de Q podemos tomar la función identidad, es decir, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, con f(n)=n, por lo que tenemos que $|\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{N}|$
2) Ahora presentaremos $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:



Donde cada punto en el plano cartesiano (p,q) representa a la fracción p/q por lo que tenemos una función inyectiva ya que la manera de enumerar a los racionales es única para cada número natural siguiendo la secuencia 0, 1,1/2, -1/2, -1, -2,…. Por lo que se tiene que $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$

Por último aplicando el teorema de Cantor-Bernstein podemos asegurar que |N|=|Q|.

Teorema 4 (Cantor): El conjunto de los número reales R no es numerable, es decir,

$R > N$.

Demostración: Para éste resultado haremos uso de una demostración siguiente a la que Cantor propuso inicialmente pero que se fundamenta en sus ideas.

Primero consideraremos un resultado previo en que |(0,1)|=|R|, es decir, que el intervalo del 0 al 1 es equipotente con todo el conjunto de los números reales. Ahora supongamos que existe una biyección entre todos los elementos del intervalo (0,1) y los número naturales R.

Esto implica que tenemos una lista de los números r_1, r_2, r_3,… de tal manera que es posible enlistar a todos de la siguiente manera considerando su expansión decimal única:

$$r_1 = a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, \ldots$$

$$r_2 = a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n,\ldots}$$

.

.

$$r_n = a_{n.1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots$$

Entonces construiremos ahora r=b_1, b_2, b_3,… de tal manera que cada elemento b_i sea distinto a cada elemento a_{ii} por lo que estaríamos construyendo un nuevo número racional, pero nuestra suposición al tener una biyección era que ya teníamos a todos, llegando asi a una contradicción, y probando que |R|>|N|.

Resultados

Gracias al teorema de Cantor -Bernstein se comprobó que el conjunto de los naturales es equipotente con el conjunto de los números enteros, ya que existe una función inyectiva y suprayectiva que une cada número de los naturales con uno de los enteros. Los conjuntos de números naturales y enteros tienen cardinalidad de Aleph cero.

El conjunto de los números naturales es equipotente al conjunto de los números racionales y también pertenece a Aleph cero.

El conjunto de números reales es mayor que el conjunto de números naturales ya que domina a los conjuntos de números naturales, enteros y racionales; tiene cardinalidad de Aleph 1.

Conclusiones

Al estudiar de fondo que pueden existir distintos tamaños de infinitos y más aún, que trabajamos con distintos tamaños en nuestra vida cotidiana, nos permite tener un mejor entendimiento de los temas teóricos y de las aplicaciones directas como programación. Es importante notar que el mayor uso hoy en día se da en los conjuntos numerables, y al demostrar que tanto entero Z y racionales Q son numerables, permite tener un mayor catálogo de opciones al momento de operar con éste tipo de situaciones. También esto abre la oportunidad de buscar nuevas aplicaciones y nuevas ramas donde se puedan utilizar tamaños mas grandes de infinitos como Aleph 1 que todo el tiempo lo utilizamos teóricamente con los números reales.

Aparato Crítico

Amor Montaño, José Alfredo. (2011). Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias. México: Las prensas de ciencias.

Aponte Amarín, M. (2014). *LA NOCIÓN DE INFINITO EN GEORGE CANTOR. UN ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.*. Maestría. Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía.

Basa, Jerónimo. (2014). Sobre el teorema de Cantor-Bernstein y la matemática de conjuntos.. Licenciatura: Universidad Nacional del Litoral.

Cabada Castro, Manuel. (2009). LA FUNDAMENTACIÓN FILOSÓFICA DEL «TRANSFINITO» EN G. CANTOR Y LA CUESTIÓN DEL INFINITO. Pensamiento, 65, 44. Febrero 2018.

Cantor, G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, 1955.