Historia de los infinitos

Clave de Registro: CIN2012A20008

Green Hills School

Autores:

César Augusto Farrera Ortega

Claudio Alejandro Fuentes Carreón

Hugo Harleston Aguirre

Asesores:

Miguel Vázquez Gasca

Alberto de Jesús Flores Sánchez

Área de conocimiento: Ciencias Fisicomatemáticas y de las Ingenierías

Disciplina: Matemáticas

Tipo de Investigación: Documental

Fecha de registro: 06 12 2012 12:10 :55

México, D.F., 13 de Febrero del 2013.

RESUMEN

El infinito es un tema que ha intrigado a todos por milenios, y aún hoy en día no hemos logrado comprenderlo por completo. Es por eso que en este trabajo se decidió intentar aclarar un poco el concepto de infinito explicando su historia y desarrollo a lo largo de los años. Desde la antigua Grecia, Con Zenón de Enea. Con el latino Lucrecio. Galileo y su "Si existiera.". Hasta Georg Cantor, con su mente brillante, infinita. Cantor llega al punto en el que logra explicar de manera lógica el tamaño del infinito. ¿O tamaños?

Se explicarán las demostraciones que Cantor desarrolló para explicar que el infinito no es solo uno, sino: ¡Infinito! Sí, hay infinidad de infinitos. Y no solo eso, sino que todos son de diferente tamaño también. ¿Tamaños de infinito? En este trabajo de investigación se intenta explicar ese concepto tan extraño, por medio de las mismas demostraciones de Cantor y de otras que lo hacen aún más sencillo. Se espera que, así como a nosotros se nos facilitó comprender al infinito después de realizar la investigación, ustedes puedan comprenderlo mejor.

ABSTRACT

The infinite is a topic that has intrigued the human race for millennia, and not even today we have been able to fully understand it. Because of that we have decided to try to clarify the concept of infinite by explaining its history and development throughout the years. Since ancient Greece, with Zeno of Cattail, with the Latin, Lucrecio, Galileo and his "If it existed." until Georg Cantor, with his brilliant, infinite mind. Cantor gets to a point in which he is able to explain logically the size of infinite. Or sizes?

We explain the demonstrations that Cantor developed to explain that the infinite is not only one, but: Infinite! Yes, there is infinity of infinites. And not only that, but each and every one of them is from a different size too. Sizes of infinite? In this investigation we try to explain this strange concept, by using the same demonstrations that Cantor used, and some others that make it a lot easier to understand. We hope that, just like we could understand the infinite better after working on this investigation, you can understand it better too.

INDICE

INTRODUCCIÓN

El Infinito no es catalogado como un número real. El Infinito es considerado una idea, una idea que representa algo que no termina, que nunca acaba, como el universo, o la serpiente uróboros, que engulle su propia cola, cosa que significa la lucha eterna, el infinito. El propósito de este trabajo consiste en exponer una breve recopilación sobre la historia del infinito, desde las primeras ideas acuñadas por Aristóteles hasta la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor, base de las matemáticas modernas. Esta recopilación e iniciativa, surgida por el gran interés de los distintos miembros del equipo por develar estos conocimientos a la gente, pretende, aparte de divulgar, intentar descifrar y dar significado a la teoría e historia de los infinitos, que son parte importante de nuestro conocimiento matemático moderno.

El infinito siempre ha sido un concepto difícil de definir e incluso temido y prohibido en algunas épocas de la historia. Sin embargo es un concepto el cual se usa con cotidianidad en la vida diaria actual. Todo mundo ha escuchado frases como "Te he dicho infinitas veces que pongas atención." o "Tengo infinitos problemas."
Pero… ¿Cuánto es infinito? Primero tendríamos que pensar en un número muy grande, por ejemplo un gogol es un número igual a 10^{100} Eso es un numero increíblemente grande sin embargo no es infinito.

Infinito (como su nombre lo indica) es algo que no tiene fin, que continua por siempre. Entonces al decir que existen infinitos números quiere decir que estos no tienen fin, siempre habrá un número más grande que el número más grande imaginable. Introduzcámonos ahora en el maravilloso mundo que es regido por el número más grande de todos: El infinito.

OBJETIVOS

Investigar, comprender y explicar la historia del "infinito" en matemáticas, los conjuntos infinitos y sus diferentes cardinalidades. Entender porqué existe el infinito y porqué causó tanta polémica en el pasado.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La información será obtenida principalmente de libros y artículos de revistas, buscaremos si es necesario en internet, pero se intentará hacer eso lo menos posible. Se utilizaran fichas bibliográficas.

DESARROLLO

Aunque pareciera que el infinito es un concepto moderno, que se comenzó a estudiar hace pocos siglos, en realidad es algo que lleva en las mentes de sabios desde hace ya algunos miles de años. Los griegos ya comenzaban a tener ideas y vagos conceptos sobre lo que es el infinito. Algunos a favor, y otros en contra, hablaron mucho del tema y, aunque no lograron avanzar mucho, sentaron las bases para lo que hoy en día es el infinito de Georg Cantor.

Uno de los primeros en cuestionar sobre el infinito fue el filosofo Zenón de Enea cuando enunció su paradoja de Aquiles y la tortuga en el siglo V a.C. En esta paradoja Aquiles y una tortuga están en una carrera, Aquiles parte del punto A y la tortuga de un punto B más cercano a la meta que A. Al iniciar, Aquiles recorre la mitad del camino que le falta, al igual que la tortuga. Aquiles y la tortuga vuelven a avanzar, recorriendo de nuevo la mitad del camino que les falta por andar. Como la tortuga comenzó en un punto más adelante que Aquiles, ella siempre llevará la ventaja, sin embargo, al avanzar solo la mitad del camino cada vez, nunca llegarán a la meta, pues estarán avanzando infinitas mitades. Este proceso se podría repetir infinitas veces y Aquiles jamás alcanzaría a la tortuga ni le ganaría. Zenón llego a la conclusión de que el movimiento es imposible porque es necesario pasar por una cantidad infinita de puntos en un tiempo finito.

Pitágoras se enfrento al infinito cuando al tratar de calcular la hipotenusa de un triangulo rectángulo de una unidad de base y una unidad de altura el resultado era $\sqrt{2}$, Debido a que su teorema $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, el cual era un numero irracional con infinitos decimales, este resultado lo desconcertó bastante y no fue posible calcularlo ni comprenderlo en esa época.

Aristóteles también habló del infinito, y menciona que el infinito solo puede pertenecer al campo de la cantidad. Dice que si el infinito existe, hay que definirlo. El infinito, comenta, no puede entenderse como una totalidad, y por lo tanto no puede existir en acto, y al no poder existir así, el infinito existirá "en potencia".

Hubo un latino, Lucrecio, que demuestra en cierta forma la existencia de un número ilimitado de mundos infinitos utilizando un método parecido a lo que hoy conocemos como la reducción al absurdo, que consiste en probar que algo es verdadero refutando la hipótesis contraria a lo que se quiere probar.

Lucrecio utilizó la hipótesis de la finitud del mundo, y para refutarla, "invita" a un arquero hasta el "borde" del mundo y le pide que lance una flecha, al hacerlo, Lucrecio pregunta: "Esta flecha, arrojada con gran vigor, ¿prefieres que persiga su objetivo y vuele lejos o eres del parecer de que pueda haber un obstáculo que interrumpa su curso?"[1]

Lucrecio comenta, después de esta pregunta, que "En cualquier parte que coloques el borde extremo del mundo, yo te preguntaré que ocurrirá con la flecha. Sucederá que ninguna parte podrá erigirse como límite y que nuevas escapadas prolongarán sin cesar hasta el infinito las posibilidades de alejarse"[2]

Aquí, Lucrecio ha definido, con los limitados conocimientos que tenían en aquella época sobre el mundo, la existencia del infinito sin ton ni son.

La idea del infinito se mantuvo por mucho tiempo como algo inalcanzable o como un concepto demasiado grande como para ser comprendido por la mayoría.

Retomando a Aristóteles, el desarrolla el concepto de un finito con expansión ilimitada, como intento de definición del infinito. El menciona que "el infinito no es aquello fuera de lo

[1] GUEDJ, Denis. *El imperio de los números*, Blume, París, Francia, 1996, p. 112
[2] GUEDJ, Denis. *El imperio de los números*, Blume, París, Francia, 1996, p. 113-114

cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre hay alguna cosa nueva, en cuanto a la cantidad".

La sociedad vivió por más de mil años con este último concepto de un infinito, que era meramente imaginario, y no tenían pruebas de su existencia. Años después llegó Galileo, a poner la situación más difícil.
Galileo Galilei mencionó en sus Diálogos que "Los atributos "igual", "mayor", "menor" no son aplicables a cantidades infinitas. Lo infinito es intrínsecamente incomprensible."

Sin embargo, todavía faltaba que llegara a la historia del infinito un matemático que concibió en su mente lo que a muchos nos cuesta trabajo comprender incluso hoy en día, un matemático que incluso generó una de las discusiones matemáticas más interesantes, desde nuestro punto de vista, que se hayan dado en los últimos años.

Fue hasta el siglo XIX que el matemático Georg Cantor logró plantear teorías sólidas sobre los infinitos e incluso demostrarlas.

Aquí les hablamos un poco sobre la vida de quien fuera el científico que más avanzó en el estudio y el desarrollo del tema del infinito: Georg Cantor.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació el 3 de marzo de 1854 en San Petersburgo, Rusia. Era hijo del comerciante Georg Waldemar Cantor y de María Bohm. Su padre era originario de Copenhague, Dinamarca. Emigró en 1845 a San Petersburgo. En 1856 una enfermedad pulmonar impulsó al padre a trasladar a su familia a Frankfurt, Alemania. Todos estos eventos provocaron que distintas naciones reclamaran como propio a Georg Cantor.
En 1868 recibió el título de doctor por la Universidad de Berlín, con una tesis sobre teoría de números; dos años más tarde, aceptaba un puesto en la Universidad de Halle, institución respetada, si bien no de tan gran prestigio en matemáticas como las universidades de Gottingen o Berlín.

Algunos años después, en 1872, Cantor comenzó a abordar las series de Fourier, otro matemático previo a él, y basado en los resultados que obtuvo, comenzó a formular las teorías sobre números naturales y números reales, que en un futuro se convertirían en su famosa teoría de los transfinitos.

Las teorías de números reales encuentran sus máximas dificultades en números que, como $\sqrt{2}$ y π, no son racionales. (Números racionales son los expresables por cociente de dos números enteros. Desde la antigüedad es conocido que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ y otras muchas raíces son irracionales.) Puesto que nadie ponía en tela de juicio la legitimidad de los números racionales, Cantor propuso que todo número irracional podía representarse por una sucesión infinita de números racionales. Así, el número $\sqrt{2}$, por ejemplo, puede representarse por una sucesión infinita de números racionales: 1, 1,4, 1,41..., y así sucesivamente. De esta forma, todos los números irracionales pueden ser imaginados como puntos geométricos situados sobre una "recta numérica", al igual que había podido hacerse con los números racionales.

No obstante sus ventajas, algunos matemáticos encontraron difícil admitir el método de Cantor, pues presuponía la existencia de sucesiones o conjuntos formados por infinitos elementos. Filósofos y matemáticos habían venido rechazando desde los tiempos de Aristóteles la noción de infinitud completa, a causa, sobre todo, de las paradojas que parecía plantear. Galileo, por ejemplo, había ya hecho notar que, si en matemáticas fueran admisibles conjuntos infinitos completos, habría tantos números enteros pares cuantos pares e impares reunidos. Cada número entero par puede ser emparejado biunívocamente con el número entero de valor mitad, quedando así definida una correspondencia biunívoca entre los elementos de uno y otro conjunto.

Otras de las voces que manifestaban tradicionalmente oposición a la idea de infinidad completa eran las alzadas por teólogos como Santo Tomás de Aquino, por considerar que tal noción comportaba un desafío directo a la naturaleza única, infinita y absoluta de Dios.

Cantor demostró que la propiedad que Galileo había considerado paradójica era, en realidad, una propiedad natural de los conjuntos infinitos. El conjunto de los números pares es equivalente al conjunto de todos los números enteros positivos, pares e impares reunidos, porque los emparejamientos entre miembros de uno y otro conjunto pueden proseguir por siempre, sin omitir a miembro alguno de ninguno de ambos conjuntos. Cantor pudo también exhibir un método, tan refinado como ingenioso, gracias al cual el conjunto de los números racionales podía quedar en correspondencia con el de todos los enteros. Cantor llamó numerables a aquellos conjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia, uno con uno, con los números del conjunto de enteros positivos, lo que equivale a poderlos contar.

En agosto de 1874, Cantor contrajo matrimonio con Vally Guttmann; la joven pareja pasó el verano en las montañas del Harz. Este período fue extraordinariamente fructífero para el trabajo de Cantor.

Sufrió de depresión, y fue internado repetidas veces en hospitales psiquiátricos. Su mente luchaba contra varias paradojas de la teoría de los conjuntos, que parecían invalidar toda su teoría (tornarla *inconsistente* o *contradictoria* en el sentido de que una cierta propiedad podría ser *a la vez cierta y falsa*).

Hacia 1903, Cantor estaba padeciendo cada vez con más frecuencia ataques de depresión maníaca. La enfermedad le movió a solicitar licencia para abandonar la Universidad de Halle durante el otoño de 1899, permiso que le fue concedido. En noviembre de ese mismo año, Cantor notificaba al Ministerio de Cultura que deseaba renunciar por completo a la labor docente, contentándose con un modesto puesto en la biblioteca, siempre que no le fuese por ello reducido su salario.

Hacia 1884, consideró seriamente abandonar las matemáticas y dedicarse a la filosofía, tras su primera crisis nerviosa de importancia. Al igual que entonces fue hospitalizado por depresión maníaca a finales de 1899, y de nuevo en los cursos de 1902 y 1903, y a partir de entonces, por períodos cada vez más frecuentes y largos. Cantor falleció el 6 de enero de 1918, en la Halle Nevenklinik, a causa de un fallo cardíaco.

Sus teorías sólo fueron reconocidas a principios del siglo XX, y en 1904 fue galardonado con una medalla de la Sociedad Real de Londres y admitido tanto en la Sociedad Matemática de Londres como en la Sociedad de Ciencias de Gotinga. En la actualidad se le considera como el padre de la teoría de conjuntos, punto de partida de excepcional importancia en el desarrollo de la matemática moderna.

Habiendo terminando su biografía, aquí les presentamos las demonstraciones que Cantor utilizó para fundamentar su teoría de los conjuntos transfinitos:

Georg Cantor demostró que tanto el conjunto de números, pares, cuadrados y racionales tienen la misma cardinalidad que el conjunto de números naturales (enteros positivos mayores a 0). Lo demostró de la siguiente manera:

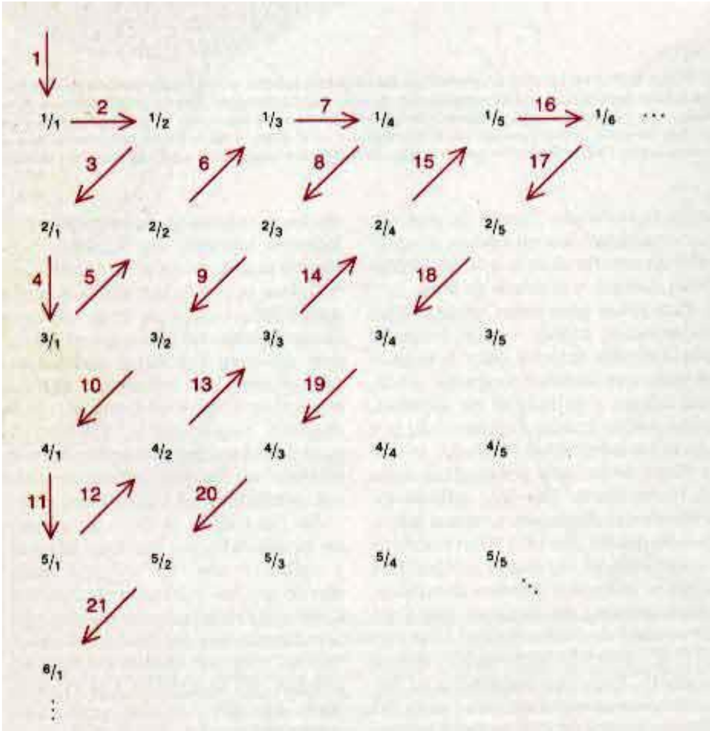
- Para los números pares los multiplicó por dos entonces tendría que:

  1,2, 3, 4,5…n, (n+1)…

  Multiplicados por 2

  2,4, 6, 8,10…2n, 2(n+1)…

  Asignándole a cada número natural un numero par correspondiente que fuera igual a 2n (donde n es el numero natural) siempre los tendría con una relación 1 a 1
- Para los cuadrados realizo el mismo procedimiento pero elevándolos al cuadrado, siempre habrá el cuadrado de un número sin importar su tamaño.
- En cambio para los racionales uso un sistema mucho más elaborado no era tan sencillo asignar valores de una manera tan directa así que realizo el siguiente diagrama:

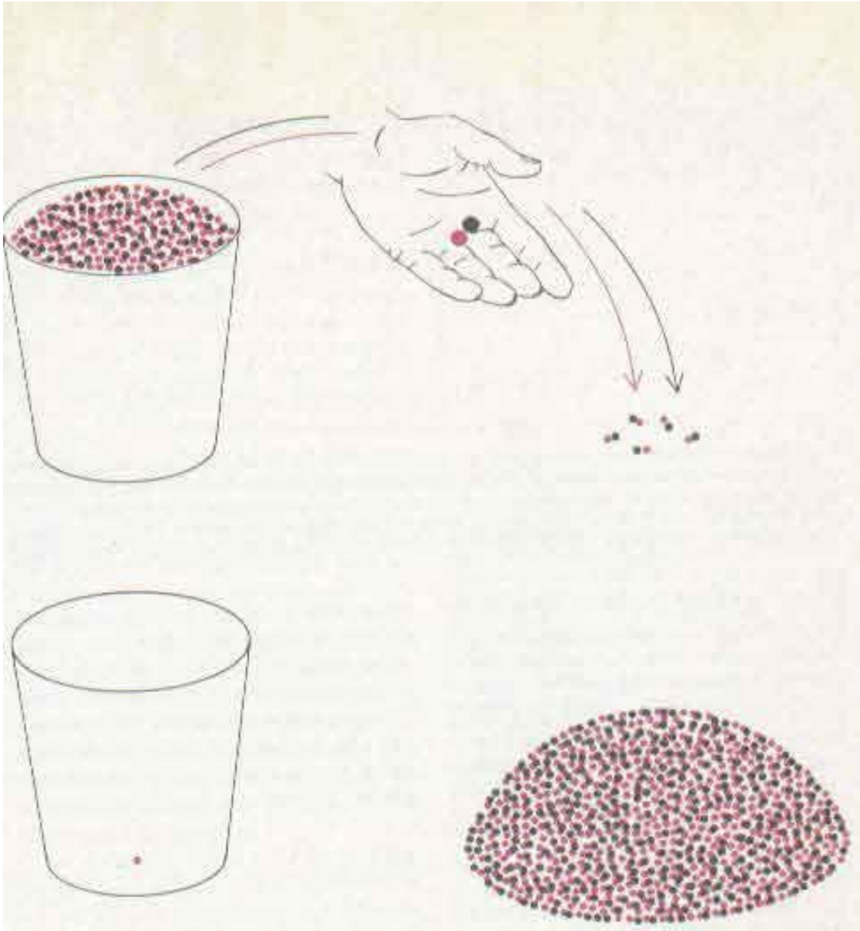


Si seguimos las flechas y a cada número le asignamos un número natural entonces tendremos que efectivamente tanto los racionales como los naturales tienen la misma cardinalidad.

A la cardinalidad de estos conjuntos la llamo Aleph 0 ($\aleph_0$). El conjunto infinito más pequeño.

Pero ¿Qué hay de los números reales? Estos tienen una cardinalidad mayor a $\aleph_0$ La manera de comprobar esto es que no existe una relación 1 a 1 con los números naturales. Este es un concepto difícil de entender pero en realidad existe un número infinito de números entre el 0 y el 1 mayor al número de números en el conjunto de los naturales.

Para explicar esto imaginemos que todos los números tanto naturales como reales están en un vaso. Si los sacáramos en pares, un número natural y un número real al mismo tiempo esta sería la relación 1 a 1. Entonces asumamos que sacamos el numero natural 1 entonces sacamos el número real 0.1 el 2 y el 0.2 el 347 y el 0.347. Aquí podemos darnos cuenta que podríamos seguir así eternamente y darnos cuenta de que sin importar que numero natural escojamos siempre podremos encontrar un numero entre 0 y 1 que puede acomodarse con dicho numero natural y eso tan solo son los números entre 0 y 1 también están los números entre 1 y 2, 2 y 3… etc. Es por eso que los números reales tienen una cardinalidad mayor a la de los naturales.



A este infinito se le llamó el "Continuo", que es el infinito que incluye a toda la recta de los números reales en él. El Continuo es un infinito mayor a Aleph cero como se acaba de demostrar. Tenemos entonces ya dos infinitos con diferentes cardinalidades: Aleph cero, o el infinito de los números naturales, y el Continuo, los números reales.

Muchos nos preguntamos ¿Hay más? ¿El Continuo es el límite, o sólo la puerta a un infinito, o infinitos más grandes?

Increíblemente, la respuesta a estas preguntas nos las dio el mismo Georg Cantor. El demuestra que, un conjunto siempre tiene más partes que elementos: si tomamos el conjunto A = {a, b, c}, este tendrá por partes a: {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {∅}. Si nos fijamos, algo bastante irónico es que el conjunto completo también se considera como una parte del conjunto, como un pedazo.

Cantor demuestra que un conjunto con n elementos, tendrá 2^n partes. Tomando el ejemplo del conjunto anterior, el conjunto tiene 3 elementos (*a*, *b* y *c*), y tiene 2^3 partes (8 partes).

De esta fórmula parte Cantor para demostrar que de Aleph cero se puede partir hacia un número infinito de infinitos, hay infinitos aleph, infinitas cardinalidades de conjuntos infinitos, que aunque no se hayan descubierto aún, se sabe que existen. Un dato muy importante que se debe tomar en cuenta es que, como se parte de aleph cero, todos los infinitos mayores a éste tienen que incluirlo en ellos, pues es el infinito más pequeño conocido.

En fin, es aquí en donde nos encontramos hoy en día, los matemáticos siguen investigando el tema y no logran llegar a una conclusión aceptada por todos, algunos están de acuerdo con Cantor, algunos no, algunos creen que puede haber un infinito intermedio entre el continuo y aleph cero (también conocido como discreto), algunos creen que hay un infinito diferente a estos últimos dos, otros no. Así, el tema continúa dando material de investigación para todos los interesados, aficionados o no, que quieran seguir desarrollando el tema y aprender sobre él.

CONCLUSIÓN

Nosotros logramos tener una perspectiva mucho más clara de lo que es el infinito, y después de toda la investigación realizada, logramos entender el porqué se tardó tanto en desarrollarse el concepto del infinito. Después de todo, conseguimos aclarar varios puntos que, aunque siguen un poco borrosos en nuestro entendimiento, podemos asegurar que ya no están tan lejanos de ser comprendidos por nosotros, pues basta un poco más de tiempo, investigación, y puesta en práctica de estos conocimientos para lograr entenderlos completamente.

BIBLIOGRAFÍA

- Serra Ruisánchez Juan Manuel. (2001). "El Gran Hotel Cantor", *¿Cómo Ves?,* No. 29, p 30
- Gullberg, Jan. *Mathematics from the birth of numbers,* Estados Unidos: W. W. Norton & Company.
- Hoffman, Paul. (2001). *El Hombre que Sólo amaba los Números,* México: Ediciones Granica.
- Guedj, Denis. (1996). *El imperio de los números*, Francia: Blume.
- Méndez, F. (2009). *Breve Historia del Infinito* [En línea] disponible en: http://www.filosofia.mx/index.php?/perse/archivos/breve_historia_del_infinito (Consultado el 3 de diciembre de 2012)
- León Sánchez A. *El Infinito Actual* [En línea] Disponible en: http://www.interciencia.es/infinito/ElInfinitoActual.pdf (Consultado el 6 de diciembre de 2012)
- Capitán M. H. *Historia de las Matemáticas: El infinito* [En línea], Disponible en: http://www.astroseti.org/articulo/3482/ (Consultado el 7 de diciembre de 2012)