Determinación de las velocidades para las cuales los efectos relativistas son apreciables

Clave de Registro del Proyecto: CIN2012A20002

Colegio de Procedencia: Colegio Ciudad de México (1059)

Nombre del Alumno: *Gabriel Cachoa Ocampo*

Nombre de Asesor: Jossellin Nayelly Martínez García

Área de conocimiento: Ciencias Fisicomatemáticas y de las Ingenierías

Disciplina: Física

Tipo de Investigación: Documental

México D.F. a 15 de febrero de 2013

Contenido

Resumen **4**

Abstract **4**

Introducción **5**

Síntesis del sustento teórico 5

Planteamiento del problema 6

Objetivo General y Específicos 7

Hipótesis y Conjeturas 7

Metodología de Investigación **9**

Primera Parte: Estudio de Funciones 9

Se enuncian las funciones a estudiar 9

Se estudia la continuidad de las funciones de la tabla 1.1 10

Continuidad de la función de Energía Cinética para la Mecánica Clásica 10

Continuidad de las Funciones que Consideran a los Efectos Relativistas 11

Se encuentran las funciones diferencia 13

Segunda Parte: Análisis Numérico 14

Funciones Diferencia 14

Funciones Diferencia Integrales 14

Evaluación de Velocidades 15

Valores de Velocidades Teóricos 16

Parámetros Mínimos de Medición 17

Velocidades a Alcanzar para Diferencias Unitarias 18

Resultados Obtenidos **18**

Conclusión **20**

Fuentes **22**

Anexos **23**

Anexo 1. Gráficas. 23

Anexo 2. Demostraciones de Continuidad. 26

Anexo 2.1. Energía Cinética que no Considera Efectos Relativistas 26

Anexo 2.2. Energía cinética que considera efectos relativistas 27

Anexo 3. Proceso para Integrar las Funciones Diferencia 31

Anexo 4. Esbozo de la Gráfica de la Función Diferencia para la Energía Cinética. 33

Anexo 5 Gráficas de las funciones Diferencia Integrales 34

RESUMEN

La relatividad especial de Einstein predice comportamientos que no concuerdan con la experiencia, esto pues los efectos relativistas no son apreciables sino sólo en ciertas condiciones. En la presente investigación se busca responder a la pregunta ¿Bajo qué condiciones los efectos relativistas son apreciables? Se consideran como clásicas o no relativistas aquellas funciones que fueron usadas desde principios del siglo XVI hasta finales del siglo XIX, y se comparan con las funciones que predicen los efectos relativistas (principios del siglo XX). La comparación es analítica y numérica. En la comparación analítica se estudia y compara la continuidad de los dos tipos de funciones y se encuentran funciones diferencia de dos tipos: la diferencia en la predicción de las funciones y el área comprendida entre las dos curvas de cada función. La comparación numérica se realiza a través de la evaluación de las funciones diferencia en valores específicos para velocidades alcanzables en el planeta tierra y a través de velocidades teóricas. Además se define un parámetro numérico para el cual serían imperceptibles los efectos de acuerdo con nuestro sistema de medición y por último se calcula cuál sería la velocidad a alcanzar para encontrar efectos relativistas unitarios. Aunque la comparación analítica de las funciones define que no hay un parámetro de valores donde los efectos no sean perceptibles, sin embargo, de acuerdo con nuestro sistema de medición, sí existe un parámetro de valores para los cuales los efectos relativistas no son perceptibles para todas las velocidades alcanzadas en el planeta tierra por objetos clásicos, es decir, debajo de $11{,}000\ \frac{m}{s}$.

ABSTRACT

Einstein's special relativity theory predicts some behaviors that don't agree with experience. The effects of special relativity are only appreciable in some conditions. In this investigation, the question that is going to be answer is: "¿Under what conditions the effects of special relativity are appreciable?" Functions that do not consider relativistic effects, I consider them classical functions, those used from early seventeenth century to later nineteenth century, and I compare them with those functions that consider relativistic effects. This comparison is analytical and numerical. In the analytical

comparison, I study and compare the continuity of both functions, and I found two types of differential functions: the first one, the function that finds the difference in the predictions of both functions, and the function that finds the area in between the two curves. The numerical comparison is realized by through the evaluation of the functions in specific values for the velocities that we can reach in planet Earth, also we numerical parameter where the relativistic effects cannot be descripted by the ways we measure unity quantities. I found the velocity where we can find relativistic effects of one unity. Even thought that the analytical comparison shows that there is no parameter where the difference is zero, but there is a parameter where the relativistic effects are not appreciable because we cannot measure in such smaller parameter, on planet Earth there is no velocity for an appreciable relativistic effect cause the maximum velocity on planet Earth is $11{,}000\ \frac{m}{s}$.

INTRODUCCIÓN

SÍNTESIS DEL SUSTENTO TEÓRICO

A propósito de los hallazgos tanto teóricos como experimentales que acontecieron a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, el físico alemán Albert Einstein postuló la teoría de la relatividad especial la cual pretendía resolver específicamente una inconsistencia teórica respecto a la teoría del electromagnetismo de Maxwell[1].

La antesala a la teoría de la relatividad especial de Einstein es un supuesto llamado *éter luminífero* el cual, se suponía, es un marco de referencia preferencial para las ondas electromagnéticas. El supuesto éter luminífero permitía que las ecuaciones de Maxwell resultaran invariantes con respecto a distintos marcos de referencia. La teoría de la relatividad especial de Einstein se reduce a dos postulados: "Las leyes de la naturaleza son las mismas para todos los marcos de referencia inerciales."[2] (Por lo que no podrían existir marcos de referencia privilegiados.) "La velocidad de la luz

[1] Hawley, John F.; Holcomb, Katherine A.1998. *Foundations of Modern Cosmology.* New York, Oxford University Press, p.171-201.
[2] Einstein, Albert. 2008. *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*. España, Editorial Alianza, p.7-56.

en el vacío es la misma para todos los marcos de referencia."[3]En conjunto la teoría de la relatividad especial recoge una serie de ecuaciones que funcionaban de acuerdo con la hipótesis del éter luminífero con un enfoque relativista, en el que no pueden existir marcos de referencia preferenciales. A esa serie de ecuaciones se les llama transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz se caracterizan por la utilización del factor gamma el cual está definido como: $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Las transformaciones de Lorentz enfocadas de acuerdo con los postulados enunciados para la teoría de la relatividad especial predicen ciertos efectos que son consecuencia del estado de movimiento, entre ellos cabe denotar que: conforme la velocidad de un cuerpo se acerca a la velocidad de la luz en el vacío aquél cuerpo aumenta su tamaño longitudinalmente, y su flujo temporal todo esto con respecto a su estado inercial. Las implicaciones de la teoría de la relatividad especial, en concreto, toma ciertos factores que se habían considerado como absolutos alrededor de la mecánica clásica (desde principios del siglo XVI hasta finales del XIX) como valores dependientes del estado de movimiento.

Como resultados generales de la teoría de la relatividad especial Einstein retoma a la energía cinética, la cual está en virtud de la masa y la velocidad de los cuerpos, tal que aplica los mismos principios de las transformaciones de Lorentz y concluye[4]: $E_R(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La presente investigación busca responder la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones los efectos de las implicaciones de la teoría de la relatividad de Einstein son apreciables? En específico, esta investigación selecciona tres implicaciones de la relatividad especial de Einstein[5]: "El universo es un continuo cuadridimensional, en el cual el tiempo no es un absoluto sino que depende del estado

[3] Ibid, p. 7-56.
[4] Hawley, John F.; Holcomb, Katherine A., Op.cit., p.171-201.
[5] Einstein, Albert, Op.cit., p.250.

de movimiento del sistema de referencia de acuerdo con las transformaciones de Lorentz.", "Los cuerpos experimentan un fenómeno de expansión longitudinal en un estado de movimiento respecto a su longitud en reposo de acuerdo con las transformaciones de Lorentz.", "La energía cinética de un cuerpo viene dada por la expresión: $E_R(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$." Implicaciones que se contraponen con las implícitas en la mecánica clásica donde, por ejemplo, el tiempo es un absoluto independiente de todo factor, la longitud de los objetos es independiente de su estado de movimiento y la energía cinética de un cuerpo viene dada por la expresión:

$E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$.

OBJETIVO GENERAL Y ESPECÍFICOS

Encontrar numéricamente un parámetro de valores de velocidad para los cuales los efectos relativistas son insignificantes en condiciones dadas a través una comparación que utiliza herramientas algebraicas y de cálculo infinitesimal entre las descripciones matemáticas que consideran los efectos relativistas y las descripciones matemáticas clásicas.

Estudiar y comparar la continuidad de las funciones que consideran a los efectos relativistas y las funciones no relativistas a través de herramientas algebraicas y de cálculo infinitesimal. Encontrar las funciones diferencia entre las funciones relativistas y las funciones no relativistas a través de herramientas algebraicas y de cálculo infinitesimal. Comparar las funciones relativistas y las funciones no relativistas a través de la evaluación de sus funciones diferencia en condiciones dadas.

HIPÓTESIS Y CONJETURAS

Tomando en cuenta que las funciones que consideran los efectos relativistas predicen distintos valores (percepción del tiempo, longitud, y energía cinética) conforme la velocidad del objeto se

acerca a la velocidad de la luz en el vacío sugiero que: Las funciones que consideran a los efectos relativistas y las que no tendrán una tendencia distinta cuando la velocidad tienda a la velocidad de luz y a infinito, sin embargo ambas serán continuas en ese intervalo de valores.

Considerando que las funciones relativistas y las no relativistas predicen valores distintos los cuales aumentan en función de la velocidad conforme ésta se acerca la velocidad de la luz en el vacío sugiero que: Existen relaciones matemáticas que predicen la diferencia entre las funciones relativistas y las no relativistas las cuales están en función de le velocidad.

Con base en las gráficas de las funciones relativistas y las funciones no relativistas (Anexo 1) sugiero que: Existe una función diferencia que encuentra el área entre las curvas tanto de las funciones relativistas y no relativistas con la cual se puede calcular el intervalo de valores donde los efectos relativistas no son apreciables.

Tomando en cuenta que en la vida cotidiana no son apreciables los efectos relativistas sugiero que: Al evaluar las funciones diferencia para las condiciones de la vida cotidiana (las velocidades alcanzadas en la vida cotidiana y los instrumentos de medición usados en la vida cotidiana) los efectos relativistas no serán apreciables, sin embargo en un parámetro cercano al de la velocidad de la luz los efectos serán apreciables.

Los efectos de las implicaciones de la teoría de la relatividad especial de Einstein no son apreciables bajo la experiencia, motivo por el cual es muy complicado comunicar de una manera convincente una de las teorías más importantes del siglo XX, pilar de la ciencia moderna. De donde surge la importancia social por los resultados de esta investigación. Como conjetura sugiero que: Al conocer bajo qué parámetros, en específico, los efectos relativistas son apreciables será más fácil comunicar de una manera apropiada la teoría de la relatividad especial de Einstein.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología de la presente investigación es documental y está dividida en dos partes. En la primera se estudian las funciones que consideran los efectos relativistas enunciadas en el planteamiento del problema y las que no los consideran a través estudios de continuidad y funciones diferencia. En la segunda se estudian numéricamente las funciones diferencia bajo condiciones dadas con el fin de definir parámetros para los cuales los efectos relativistas sean apreciables. Se seleccionan velocidades específicas y se encuentra el margen de diferencia que representan los efectos relativistas, además se encuentran las velocidades que se necesitan alcanzar para obtener un margen de diferencia apreciable en instrumentos de medición específicos.

PRIMERA PARTE: ESTUDIO DE FUNCIONES

SE ENUNCIAN LAS FUNCIONES A ESTUDIAR

Tabla 1.1 Funciones a estudiar.

Función	Clásica	Relatividad	Unidades
Energía Cinética	$E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$	$E_R(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$	$\left[Kg\,\frac{m}{v^2}m\right]$
Expansión Temporal	$t_C(v) = t_0$	$t_R(v) = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$[s]$
Expansión Longitudinal	$l_C(v) = l_0$	$l_R(v) = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$[m]$

En la tabla anterior se enuncian las funciones a estudiar, comparten la fila aquellas funciones que consideran los efectos relativistas y las que no y conciernen a lo mismo. También se indica cuáles son las unidades de la función. Nótese que sin importar si se consideran o no a los efectos relativistas, las unidades se mantienen iguales, pues el factor gamma (Γ) es adimensional.

SE ESTUDIA LA CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES DE LA TABLA 1.1

Partiendo de la definición de continuidad

> *$f: A \to \mathbb{R}$, con A ⊂ $\mathbb{R}$, es continua en a ∈ A si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:*
>
> *si x ∈ A y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
>
> *Si lo anterior se cumple para cada a ∈ A, entonces f es continua en su dominio*[6].

Lo que nos dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$, con A ⊂ $\mathbb{R}$, es continua en a ∈ A si podemos lograr que $f(x)$ y $f(a)$ difieran en un valor infinitesimal para todos los puntos x ∈ A que estén muy cercanos a a.

CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA CINÉTICA PARA LA MECÁNICA CLÁSICA

Para poder demostrar los valores de continuidad de la función $\mathrm{E_C(v)} = \frac{1}{2}\mathrm{mv^2}$, se considera, primero, una función $\mathrm{f(v)} = \mathrm{v^2}$ tal que: $\mathrm{E_C(v)} = \frac{1}{2}\mathrm{m}f(v)$. Donde: *f(v) = v*^{2}, con $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Para tal función se busca encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que si $|v - a| < \delta$ entonces $|v^2 - a^2| < \varepsilon$. Como queremos que v esté cerca de a, nos interesan valores pequeños para δ, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\delta \leq 1$. Por lo tanto, estamos considerando valores de v que satisfacen $|v - a| < \delta \leq 1$. Puesto que tal valor de δ es $\delta = mínimo\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ cumple que $|v - a| < \delta$, entonces *f(v)* es continua en a, y como a es un elemento cualquiera de sus dominio, entonces ***f(v)* es continua en su dominio**.

Ahora, consideremos la función $E_C(v) = \frac{1}{2}mf(v) = \frac{1}{2}mv^2$, con $E_C: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos un número real $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|E_C(x) - E_C(a)| < \varepsilon$, es decir, $\left|\frac{1}{2}mf(v) - \frac{1}{2}mf(a)\right| < \varepsilon$. Como *f(v)* es continua en a, para que se cumpla la desigualdad, sólo necesitamos tomar

[6] De Oteyza, Elena et. al., 2006. *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral.* 1ra. Edición, México. PEARSON Eduación, p. 61,87,90.

$\delta = \frac{\varepsilon}{\left|\frac{1}{2}m\right|} = \frac{2\varepsilon}{m}$, ya que la masa siempre ha de ser positiva. Por lo tanto, **la función $E_C(v) = \frac{1}{2}mf(v) = \frac{1}{2}mv^2$ es continua en su dominio.** Como la función es continua, entonces podemos ocupar la siguiente definición: *Una función $f(x)$ es continua para $x = a$ si el límite de la función, cuando x tiende a a, es igual al valor de la función para $x = a$. En notación: $lim_{x\to a} f(x) = f(a)$* [7]

Es decir, como se demostró, si la función es continua, entonces el límite cuando la velocidad tiende a un valor en el dominio, se encuentra simplemente sustituyendo el valor en la función. Por lo que: $\lim_{v\to-\infty} E_N(v) = \lim_{v\to+\infty} E_N(v) = \lim_{v\to\infty} E_N(v) = \infty$ pues los valores de la función son cada vez más grandes, conforme v es más grande, tanto positivamente como negativamente, así como sucede con el límite a infinito de cualquier polinomio[8].

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES QUE CONSIDERAN A LOS EFECTOS RELATIVISTAS

Para la demostración de la continuidad de estas funciones se considera una función genérica $h(v) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ que representa al factor gamma de las transformaciones de Lorentz.

Empecemos por la función de energía cinética relativista, para demostrar la continuidad de esta función, la vamos a analizar la continuidad por separado primero de $f(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$ y posteriormente de $g(v) = -m_0c^2$, para terminar analizando la continuidad de la suma de funciones.

De acuerdo con lo anterior, consideremos $h(v) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, con $h: [0, c] \to [0,1]$ porque el mayor valor que se puede tomar en el dominio es c, ya que si v toma valores más grandes, se tendría la raíz de un número complejo. Por lo que para la demostración: Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos un número $\delta > 0$ que cumpla que si tomamos $v \in [0, c]$ y $|v - a| < \delta$ entonces eso implica que $\left|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\right| < \varepsilon$. Donde $\delta = mínimo\left\{1, \frac{c^2\varepsilon^2}{1+2|a|}\right\}$ que cumple que $|v - a| < \delta$, entonces $h(v)$ es continua en a, y como a es un

[7] Granville, William Anthony, 2004. *Cálculo Diferencial e Integral*. México, D.F. Editorial Limusa, p. 18.
[8] De Oteyza, Elena, et. al., Op.cit., p.219.

elemento cualquiera de su dominio, entonces $\boldsymbol{h(v)}$ **es continua en su dominio**. Entonces $f(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$ es continua en el dominio$[0, c)$ porque que una constante que multiplica a una función continua, sigue siendo continua. Mismo razonamiento que se aplica para las funciones $t_R(v) = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y $l_R(v) = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, puesto que t_R y l_R pueden ser expresadas en función de $h(v)$: $t_R(v) = \frac{t_0}{h(v)}$ y $l_R(v) = \frac{l_0}{h(v)}$, donde t_0 y l_0 son constantes, por lo que $t_R(v)$ y $l_R(v)$ son continuas en su dominio $\boldsymbol{[0, c)}$.

Como m_0c^2 es una constante, ya que m_0 es la masa en reposo y c la velocidad de la luz, necesitamos demostrar la continuidad de una función constante. Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos $\delta > 0$ que cumpla que si $|v - a| < \delta$ entonces $|g(v) - g(a)| < \varepsilon$. Como $g(v) = -m_0c^2$ y $g(a) = -m_0c^2$, entonces $|g(v) - g(a)| = 0$ y como, por hipótesis, $\varepsilon > 0$, entonces siempre se va a cumplir que $0 < \varepsilon$. Por lo tanto, podemos tomar cualquier valor de $\delta > 0$ para que se cumpla la desigualdad, en particular $\delta = \varepsilon$. Entonces, $\boldsymbol{g(v)}$ **es continua en su dominio** $\boldsymbol{[0, c)}$. Mismo razonamiento que se puede aplicar para las funciones: $t_C(v) = t_0$ y $l_C(v) = l_0$ pues son funciones constantes por lo que $\boldsymbol{t_C(v)}$ **y** $\boldsymbol{l_C(v)}$ **son continuas en su dominio.**

Finalmente, para la función de la energía cinética, coma la suma de funciones continuas en a, es una función continua en a[9], entonces, la función $\boldsymbol{E_R(v) = f(v) + g(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]}$ **es continua en el dominio** $\boldsymbol{[0, c)}$, pues hay que quitar del dominio el valor $v = c$. (Véase las demostraciones completas en el Anexo 2)

[9] Ibid., p.92-93

SE ENCUENTRAN LAS FUNCIONES DIFERENCIA

Tabla 2.1. Funciones diferencia entre las energías clásica y relativista.

Ecuación	Función Diferencia	Unidades
Energía Cinética	$E_R(v) - E_C(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 - \frac{1}{2}mv^2$	$\left[Kg\,\frac{m}{v^2}m\right]$
Expansión Temporal	$t_R(v) - t_C(v) = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - t_0$	$[s]$
Expansión Longitudinal	$l_R(v) - l_C(v) = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - l_0$	$[m]$

En la tabla anterior se enuncia la función diferencia entre las funciones que consideran los efectos relativistas y las que no, lo cual se obtiene a través de la resta entre las dos funciones. Nótese que las unidades son exactamente las mismas.

Tabla 2.2. Integrales de las funciones diferencia entre las energías clásica y relativista.

Ecuación	Función Integral Diferencia	Unidades
Energía Cinética	$\int E_R(v)\,dv - \int E_C(v)\,dv = mc^3 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - mc^2 v - \frac{1}{6}mv^3$	$\left[Kg\,\frac{m^3}{v^3}\right]$
Expansión Temporal	$\int t_R(v)\,dv - \int t_C(v)dv = ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt$	$[m]$
Expansión Longitudinal	$\int l_R(v)\,dv - \int l_C(v)dv = cl_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vl_0$	$\left[m\frac{m}{s}\right]$

Se considera a las integrales (respecto a la velocidad) de las funciones de la tabla 1.1 y se obtiene la diferencia entre las que consideran los efectos relativistas y las que no. Sus unidades son las mismas

que se obtienen al multiplicar las unidades de la tabla 1.1 por $\frac{m}{s}$, pues es una integral con respecto a la velocidad. (Véase Anexo 3)

SEGUNDA PARTE: ANÁLISIS NUMÉRICO

FUNCIONES DIFERENCIA

En esta sección se consideran las funciones diferencia y se igualan a cero, el valor de la velocidad para el cual se cumple esa igualad es el punto donde no hay diferencia entre las dos funciones.

A $E_R(v) - E_C(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0$

B $t_R(v) - t_C(v) = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - t_0 = 0$

C $l_R(v) - l_C(v) = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - l_0 = 0$

Para las ecuaciones B, y C la única solución calculable analíticamente es cero, y puesto que no se puede despejar la ecuación A, gráficamente se encuentra que el valor que cumple la igualdad es cero. (Véase Anexo 4)

FUNCIONES DIFERENCIA INTEGRALES

En esta sección se evalúa las funciones integrales diferencia para encontrar un parámetro de valores en el cual el área comprendida entre las curvas es cero:

A $\int_0^x E_R(v)\,dv - \int_0^x E_C\,dv = mc^3 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - mc^2 v - \frac{1}{6}mv^3 = 0$

B $\int_0^x t_R(v)\,dv - \int_0^x t_C(v)\,dv = ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt = 0$

C $\int_0^x l_R(v)\,dv - \int_0^x l_C(v)\,dv = ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt = 0$

Al evaluar las integrales en sus respectivos límites se obtienen las ecuaciones cuya variable representa el límite final en donde terna el parámetro donde el área es cero.

A $mc^3 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - mc^2 v - \frac{1}{6}mv^3 = 0$

B $ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt = 0$

C $ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt = 0$

Puesto que las ecuaciones no son despejables, se considera una solución gráfica en la cual sólo existe una raíz, la cual es cero para los tres casos A, B, C. (Véase Anexo 5)

EVALUACIÓN DE VELOCIDADES

En esta sección se consideran valores de velocidades específicas para las cuales las funciones diferencia, en su forma original e integral, son evaluadas.

Tabla 3.1. Evaluación de las funciones diferencia para velocidades características

Velocidad	Kg	m/s	$E_R(v) - E_C(v)$	$t_R(v) - t_C(v)$	$l_R(v) - l_C(v)$
Máxima de un caracol (*Helix pomatia)*[10]	.015	.013	0	0	0
Usain Bolt[11]	95	10.4384134	0	0	0
Guepardo *(Acinonyx*	55	16.8067227	0	0	0

[10] http://www.muyinteresante.es/ia-que-velocidad-corren-los-caracoles, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs.
[11] http://www.nationalgeographic.es/noticias/animales/el-guepardo-bate-el-record-de-velocidad-superando-a-usain-bolt-por-segundos, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs.

jubatus)[12]					
Máxima en Fórmula 1[13]	600	95	0	$5.10x10^{-14}$	$5.10x10^{-14}$
Proyectil[14]	1000	11000	0	$6.72222x10^{-10}$	6.7222210^{-10}

En la tabla anterior se toman velocidades notables y cuál sería la diferencia causada por los efectos relativistas. Para el cálculo de los valores anteriores se manejó una calculadora que maneja decimales hasta 10^{-20}, por lo que los valore de cero en realidad es un decimal inferior a 1 x 10^{-20}.

VALORES DE VELOCIDADES TEÓRICOS

Tabla 3.2. Evaluación de las funciones diferencia para velocidades teóricas.

Kg	m/s	$E_R(v) - E_C(v)$	$t_R(v) - t_C(v)$	$l_R(v) - l_C(v)$
1000	3000	0	$5x10^{-11}$	$5x10^{-11}$
1000	30000	0	$5x10^{-9}$	$5x10^{-9}$
1000	50000	0	$1.38889x10^{-8}$	$1.38889x10^{-8}$
1000	60000	0	$2x10^{-8}$	$2x10^{-8}$
1000	65000	0	$2.34722x10^{-8}$	$2.34722x10^{-8}$
1000	70000	0	$2.72222x10^{-8}$	$2.72222x10^{-8}$
1000	73000	0	$2.96056x10^{-8}$	$2.96056x10^{-8}$
1000	75000	131072	$3.125x10^{-8}$	$3.125x10^{-8}$
1000	80000	163840	$3.55556x10^{-8}$	$3.55556x10^{-8}$
1000	90000	278528	$4.5x10^{-8}$	$4.5x10^{-8}$
1000	100000	409600	$5.55556x10^{-8}$	$5.55556x10^{-8}$
1000	110000	606208	$6.72222x10^{-8}$	$6.72222x10^{-8}$

[12] Ibid., México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs.
[13] http://www.tudiscovery.com/web/vroom/f1/, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs
[14] Hawley, John F.; Holcomb, Katherine A., Op.cit., p.171-201.

1000	150000	2097152	$1.25x10^{-7}$	$1.25x10^{-7}$
1000	200000	6668288	$2.22222x10^{-7}$	$2.22222x10^{-7}$
1000	250000	16269312	$3.47222x10^{-7}$	$3.47222x10^{-7}$
1000	500000	260423680	$1.38889x10^{-7}$	$1.38889x10^{-7}$
1000	750000	1318371328	$3.12501x10^{-7}$	$3.12501x10^{-7}$

En la tabla anterior se evalúan las funciones diferencia para valores teóricos donde se puede evidenciar las consecuencias de los efectos relativistas y, al igual que la tabla anterior, se manejó una calculadora que maneja decimales hasta 10^{-20}, por lo que los valore de cero en realidad es un decimal inferior a 1 x 10^{-20}. Se puede observar que para velocidades superiores a 30,000$^{m}/_{s}$, los efectos son superiores en factores de 1x10^{-9}.

PARÁMETROS MÍNIMOS DE MEDICIÓN

En esta sección se investigan los parámetros mínimos de medición para las unidades que se manejan alrededor de la presente investigación $J, m,$ y s.

Tabla 3.3. Parámetros mínimos de medición[15].

	Energía J	**Distancia m**	**Tiempo s**
Orden de Magnitud del parámetro mínimo de medición	Energía cinética de un electrón en un potencial de un voltio.	Tamaño de un átomo	Segundos en términos de oscilaciones radioactivas de Cesio 133
	$1.6x10^{-19}\,J$	$5x10^{-9}\,m$	$9.9x10^{-11}Hz = 1s$

[15] Ibid., p.171-201.

En la tabla anterior se identifican las magnitudes más pequeñas de medición con respecto a las unidades utilizadas en la presente investigación.

VELOCIDADES A ALCANZAR PARA DIFERENCIAS UNITARIAS

En esta sección de acuerdo con las funciones diferencia se encuentran las velocidades para poder percibir los efectos relativistas unitarios para cada ecuación.

Tabla 3.4 Identificación de velocidades para cambios unitarios.

Velocidad	Diferencia Energética	Diferencia Longitudinal	Diferencia Temporal
$261871508\frac{m}{s}$	$6.01x10^{19}$J	1.041m	1.041s

En la tabla anterior se obtiene la velocidad para la cual ocurre un cambio unitario en las unidades de tiempo y longitud de acuerdo con los efectos relativistas.

Tabla 3.5 Energía Cinética para Velocidad Dada.

Velocidad	Energía Cinética Total
$261871508\,\frac{m}{s}$	$1.5x10^{19}$ J

En la tabla anterior se obtiene la energía cinética total con la cual el cuerpo alcanza la velocidad en la cual se aprecian unitariamente los efectos relativistas.

RESULTADOS OBTENIDOS

De la investigación documental se obtuvo que:

La función energía cinética, de acuerdo con la mecánica clásica, es continua en su domino, el cual son todos los números reales y positivos y que la energía tiende a infinito cuando la velocidad tiende a infinito.

La energía cinética, de acuerdo con la relatividad, es continua en su domino el cual son todos los números reales y positivos inferiores a c sin incluirlo, y la energía cinética tiende a infinito cuando la velocidad tiende a c.

Las funciones $t_c(v)$ y $l_c(v)$ son continuas en su dominio, todos los números reales y positivos; tienden a una constante, el valor $t_c(0)$ y $l_c(0)$, cuando la velocidad tiende a infinito.
Las funciones $t_r(v)$ y $l_r(v)$ son continuas en su dominio, todos los números reales y positivos e inferiores a c; cuando la velocidad tiende a la velocidad de la luz los valores de las funciones $t_c(v)$ y $l_c(v)$ tienden a infinito. Lo cual se puede escribir como:

- $\lim_{v\to c} E_E(v) = \infty$
- $\lim_{v\to c} E_N(v) = \frac{1}{2}mc^2$
- $\lim_{v\to c} E_E(v) = \infty$
- $\lim_{v\to \infty} E_N(v) = \infty$
- $\lim_{v\to \infty} E_E(v) = \nexists$

Existen funciones diferencia, enunciadas en la tabla 2.1 y 2.2, las cuales, al ser evaluadas en cero, se encuentra que sólo hay un valor para el cual la diferencia entre las funciones que consideran efectos relativistas y las que no consideran efectos relativistas el cual es cero. Al evaluar las funciones diferencia integrales se encuentra que no hay un parámetro de valores en el que no exista diferencia entre los dos tipos de funciones.

De acuerdo con la tabla 3.1, para las velocidades alcanzables en el planeta tierra y para cuerpos astronómicos, no son apreciables los efectos relativistas en magnitudes superiores a $1x10^{-15}$ en longitudes y tiempos y energía cinética en magnitudes superiores a $1x10^{-20}$. De acuerdo con la tabla 3.2 los valores no son apreciables en una magnitud de $1x10^{-9}$ hasta alcanzar velocidades superiores a un milésimo de la velocidad de la luz.

De acuerdo con la tabla 3.3 los valores mínimos medibles son superiores en magnitud $1x10^{-19}\,J$, $5x10^{-9}\,m$, y $1x10^{-11}\,s$. Por lo que, todos aquellos efectos relativistas inferiores a esos parámetros, son inapreciables para los sistemas de medición más exactos que se pudieran crear.

Para la velocidad en la cual la expansión longitudinal y la dilatación temporal son alteradas en una unidad es del ***87%*** de la velocidad de la luz y la energía necesaria para alcanzar esa velocidad es de $\boldsymbol{1.5x10^{19}J}$.

CONCLUSIÓN

Como respuesta a la pregunta establecida en el planteamiento del problema se concluye que:

- Las condiciones en las cuales los efectos relativistas son apreciables se restringen a cambios en las velocidades ya que, como se enuncia en la tabla 1.1, los efectos relativistas sólo están en función de la velocidad.
- Existe un parámetro numérico para el cual los efectos relativistas son apreciables, siempre y cuando las velocidades sean superiores a las magnitudes dadas según nuestra capacidad para medir las mínimas de las unidades que manejamos en esta investigación: $1.6x10^{-19}\,J$ para la energía, $5x10^{-9}\,m$ para las distancias y $9.9x10^{-11}\,Hz$ para el tiempo. Por lo que, los efectos relativistas serían apreciables sólo para cuando las velocidades sean tan grandes que los efectos estén en magnitudes superiores a las anteriores, lo cual ocurre aproximadamente a velocidades superiores a $70{,}000\ \frac{m}{s}$.
- Para las velocidades alcanzables por objetos mecánicos en el planeta tierra, incluyendo aquella velocidad en la cual se rompe la atracción gravitatoria, los efectos son imperceptibles, pues la magnitud de los efectos es inferior a la cual pudiéramos medir con los artefactos más exactos construibles.
- A través de las comparaciones de las funciones relativistas y las no relativistas, encontramos que las tendencias son distintas para valores específicos, como la velocidad de la luz e infinito.

Motivo por el cual podemos asegurar que existe una divergencia entre las funciones relativistas y las no relativistas.

- Las funciones diferencia integrales predicen que no existe un parámetro de valores para el cual la diferencia es cero, sin embargo, sí existe un parámetro de valores para el cual los efectos relativistas no son apreciables y es, como ya se mencionó, cuando los efectos son inferiores a las magnitudes medibles de las unidades, respectivamente.

FUENTES

1. Hawley, John F.; Holcomb, Katherine A.1998. *Foundations of Modern Cosmology*. New York, Oxford University Press, p.171-201.

2. Einstein, Albert. 2008. *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*. España, Editorial Alianza, p.7-56.

3. De Oteyza, Elena et. al., 2006. *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral.* 1ra. Edición, México. PEARSON Eduación, p. 61,87,90.

4. Granville, William Anthony, 2004. *Cálculo Diferencial e Integral*. México, D.F. Editorial Limusa, p. 18.

5. http://www.muyinteresante.es/ia-que-velocidad-corren-los-caracoles, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs.

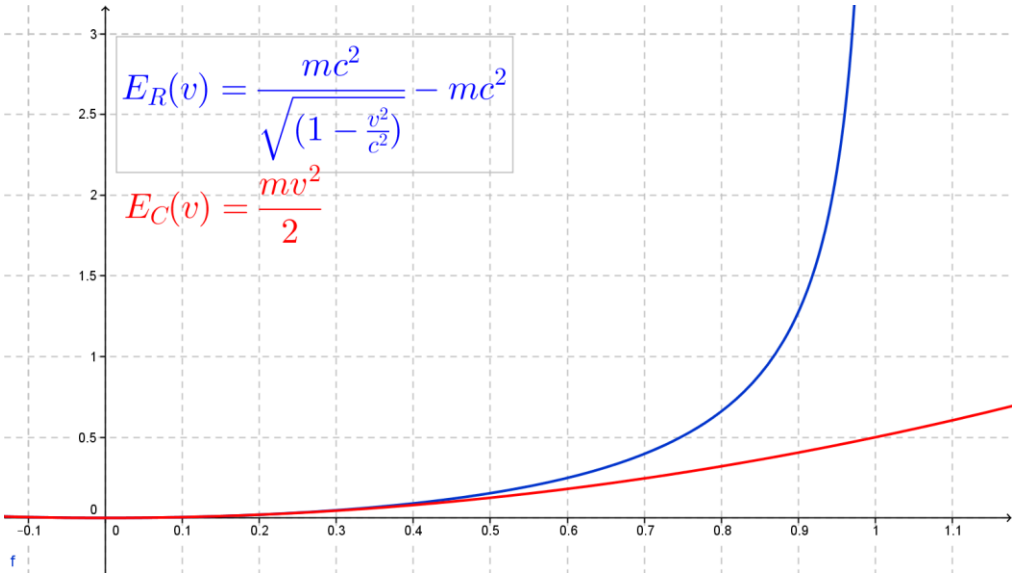
6. http://www.nationalgeographic.es/noticias/animales/el-guepardo-bate-el-record-de-velocidad-superando-a-usain-bolt-por-segundos, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs.

7. http://www.tudiscovery.com/web/vroom/f1/, México, D.F. a 10 de febrero de 2012 17:30hrs

ANEXOS

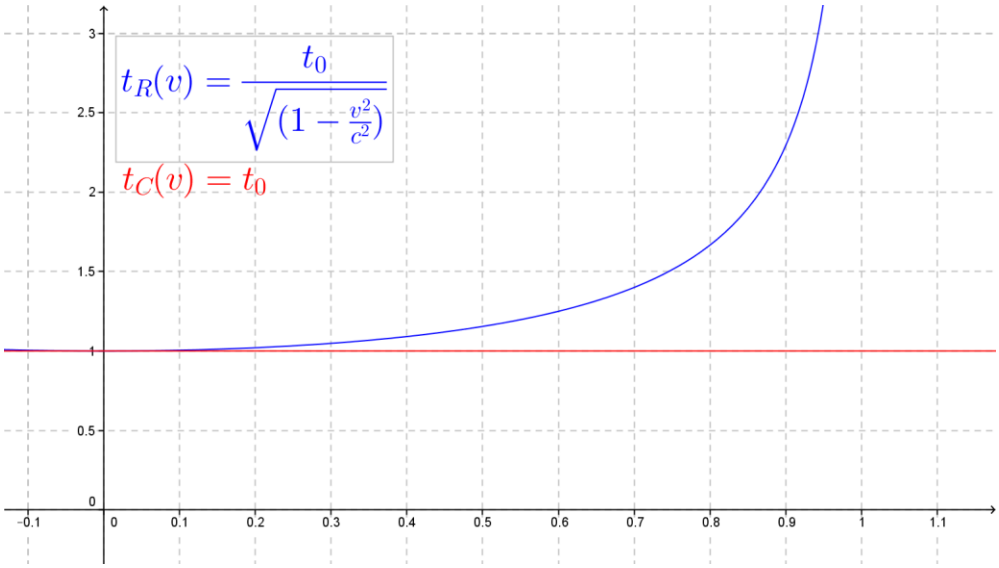
ANEXO 1. GRÁFICAS

Gráfica 1.1 Esbozo de las funciones de Energía Cinética



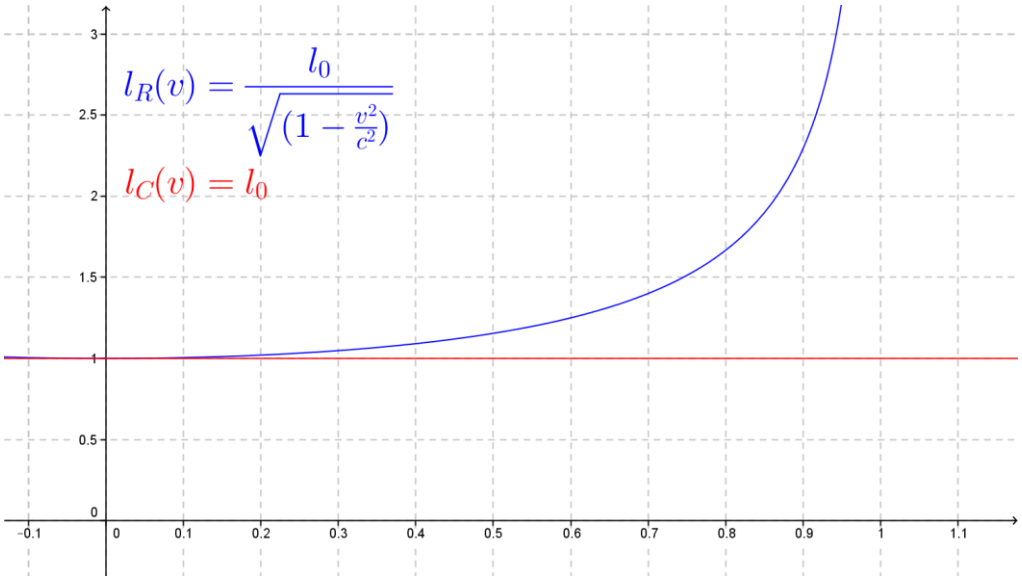
A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esbozan las funciones para energía cinética cuando se toman en cuenta los efectos relativistas ($E_R(v)$, azul) y cuando no se toman en cuenta ($E_C(v)$, rojo). El eje x cuantifica la velocidad y el eje *y* la cantidad de energía cinética. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

Gráfica 1.2. Esbozo de las funciones del tiempo



A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esbozan las funciones para energía cinética cuando se toman en cuenta los efectos relativistas ($t_R(v)$, azul) y cuando no se toman en cuenta ($t_C(v)$, rojo). El eje x cuantifica la velocidad y el eje y la percepción del tiempo. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

Gráfica 1.3. Esbozo de las funciones de expansión longitudinal



A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esbozan las funciones para energía cinética cuando se toman en cuenta los efectos relativistas ($l_R(v)$, azul) y cuando no se toman en cuenta ($l_C(v)$, rojo). El eje x cuantifica la velocidad y el eje *y* la expansión longitudinal. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

ANEXO 2. DEMOSTRACIONES DE CONTINUIDAD.

ANEXO 2.1. ENERGÍA CINÉTICA QUE NO CONSIDERA EFECTOS RELATIVISTAS

$$E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

Inicialmente, tomemos *f(v)* = v^2, con $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ y demostremos que es continua.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos $\delta > 0$ tal que si $|v - a| < \delta$ entonces $|v^2 - a^2| < \varepsilon$. Como queremos que *v* esté cerca de a, nos interesan valores pequeños para δ, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\delta \leq 1$. Por lo tanto, estamos considerando valores de *v* que satisfacen

$$|v - a| < \delta \leq 1$$

Por otro lado, a la diferencia de funciones la podemos factorizar como una diferencia de cuadrados

$$|v^2 - a^2| = |(v + a)(v - a)| = |v + a||v - a|$$

reacomodando $+a$ como una resta

$$|v + a||v - a| = |v - a||v - a + 2a|$$

ocupando las propiedades de valor absoluto $|a + b| \leq |a| + |b|$ y $|ka| = k|a|\ si\ k \geq 0$

$$|v - a|\,|v - a + 2a| \leq |v - a|\,(|v - a| + 2|a|)$$

como $|v - a| \leq 1$

$$|v - a|\,(|v - a| + 2|a|) \leq |v - a|\,(1 + 2|a|) < \varepsilon$$

Y como $|v - a| < \delta$, para lograr esta desigualdad, necesitamos que $\delta = \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$. Además como por hipótesis pedimos que $\delta \leq 1$, entonces podría suceder que $\delta = 1$, por lo tanto $\delta = mínimo\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$.

Como logramos encontrar el valor de δ que cumple que $|v - a| < \delta$, entonces *f(v)* es continua en a, y como a es un elemento cualquiera de sus dominio, entonces ***f(v)* es continua en su dominio**.

La función que nos interesa es $E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$, y como $\frac{1}{2}m$ es una constante para un objeto con una masa determinada, entonces necesitamos demostrar que el producto de una constante c por una función continua en a es continua en a.

Consideremos la función $E_N(v) = \frac{1}{2}mf(v) = \frac{1}{2}mv^2$, con $E_N: \mathbb{R} \to [0, \infty)$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos un número real $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|E_C(x) - E_C(a)| < \varepsilon$, es decir, $\left|\frac{1}{2}mf(v) - \frac{1}{2}mf(a)\right| < \varepsilon$. Así, ocupando nuevamente las propiedades de valor absoluto, tenemos que para cualquier $v \in A$

$$\left|\frac{1}{2}mf(v) - \frac{1}{2}mf(a)\right| = \left|\frac{1}{2}m(f(v) - f(a))\right| = \left|\frac{1}{2}m\right| |f(v) - f(a)| < \varepsilon$$

y como $f(v)$ es continua en a, para que se cumpla la desigualdad, sólo necesitamos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{\left|\frac{1}{2}m\right|} = \frac{2\varepsilon}{m}$, ya que la masa siempre ha de ser positiva.

Por lo tanto, **la función $E_C(v) = \frac{1}{2}mf(v) = \frac{1}{2}mv^2$ es continua en su dominio.**

Anexo 2.2. Energía cinética que considera efectos relativistas

$$E_R(v) = \Delta m\, c^2 = (m - m_0)c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

Para demostrar la continuidad de esta función, la vamos a analizar la continuidad por separado primero de $f(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$ y posteriormente de $g(v) = -m_0c^2$, para terminar analizando la continuidad de la suma de funciones.

De acuerdo con lo anterior, consideremos $h(v) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, con $h: [0,c] \rightarrow [0,1]$ porque el mayor valor que se puede tomar en el dominio es c, ya que si v toma valores más grandes, se tendría la raíz de un número complejo. Demostremos su continuidad.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos un número $\delta > 0$ que cumpla que si tomamos $v \in [0,c]$ y $|v-a| < \delta$ entonces eso implica que $\left|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}\right| < \varepsilon$.

Para encontrar la $\delta > 0$, primero es conveniente demostrar que $\left|\sqrt{A}-\sqrt{B}\right| \leq \sqrt{|A-B|}$

Esta desigualdad es equivalente a la que se obtiene elevando al cuadrado ambos lados[16]

$$\left(\left|\sqrt{A}-\sqrt{B}\right|\right)^2 \leq |A-B|$$

pero el lado izquierdo de la desigualdad es igual a $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2$ pues tanto A como B $\in [0,\infty)$, es decir, son números reales positivos. Entonces

$$\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2 = A - 2\sqrt{AB} + A$$

Supongamos que $B \leq A$

$$A - 2\sqrt{AB} + B \leq A - 2\sqrt{B^2} + B = A - B = |A-B|$$

Supongamos ahora que $A \leq B$

$$A - 2\sqrt{AB} + B \leq A - 2\sqrt{A^2} + B = -A + B = |A-B|$$

por lo que, en general

$$A - 2\sqrt{AB} + B \leq |A-B|$$

entonces

$$\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2 = \left(\left|\sqrt{A}-\sqrt{B}\right|\right)^2 \leq |A-B|$$

y calculando la raíz cuadrada

$$\left|\sqrt{A}-\sqrt{B}\right| \leq \sqrt{|A-B|}$$

[16] De Oteyza, Elena, Op.cit., p.91-92

Retomando la demostración, para encontrar la $\delta > 0$ necesitamos conseguir que $\sqrt{\left|\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)\right|} < \varepsilon$, que es equivalente a $\left|\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)\right| < \varepsilon^2$ o, simplificando

$$\left|1-\frac{v^2}{c^2}-1+\frac{a^2}{c^2}\right| = \left|-\frac{v^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}\right| = \left|-\frac{1}{c^2}\right||v^2-a^2| = \frac{1}{c^2}|(v-a)(v+a)| < \varepsilon^2$$

lo anterior debido a que la constante c es positiva y a que podemos factorizar la diferencia de cuadrados. Y resolviendo de la misma manera en que por hipótesis se pidió que $\delta \leq 1$, para $f(v) = v^2$, entonces $\delta = mínimo\left\{1, \frac{c^2\varepsilon^2}{1+2|a|}\right\}$.

Como logramos encontrar el valor de δ que cumple que $|v-a| < \delta$, entonces $h(v)$ es continua en a, y como a es un elemento cualquiera de su dominio, entonces $\boldsymbol{h(v)}$ **es continua en su dominio**.

Ocupando la propiedad de que "El recíproco de una función continua a, que no se anula en a, es continua en a"[17], entonces $f(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$ es continua en el dominio$[0, c)$ (porque $\boldsymbol{a = c}$ es el punto donde se anula la función $h(v)$) y también por la demostración anterior de que una constante que multiplica a una función continua, sigue siendo continua.

Ahora, tomando la función $g(v) = -m_0c^2$, con $g: [0, c] \rightarrow [0,1]$, demostremos que es continua.

DEMOSTRACIÓN

Como m_0c^2 es una constante, ya que m_0 es la masa en reposo y c la velocidad de la luz, necesitamos demostrar la continuidad de una función constante. Sea $\varepsilon > 0$, y buscamos $\delta > 0$ que cumpla que si $|v-a| < \delta$ entonces $|g(v)-g(a)| < \varepsilon$.

Como $g(v) = -m_0c^2$ y $g(a) = -m_0c^2$, entonces $|g(v)-g(a)| = 0$ y como, por hipótesis, $\varepsilon > 0$, entonces siempre se va a cumplir que $0 < \varepsilon$. Por lo tanto, podemos tomar cualquier valor de $\delta > 0$ para que se cumpla la desigualdad, en particular $\delta = \varepsilon$.

Entonces, $\boldsymbol{g(v)}$ **es continua en su dominio** $\boldsymbol{[0, c]}$**.**

[17] Ibid., p.97

Finalmente, coma la suma de funciones continuas en a, es una función continua en a[18], entonces, la función $\boldsymbol{E_E(v) = f(v) + g(v) = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]}$ **es continua en el dominio** $[\boldsymbol{0, c})$, pues hay que quitar del dominio el valor $v = c$.

[18] Ibid., p.92-93

ANEXO 3. PROCESO PARA INTEGRAR LAS FUNCIONES DIFERENCIA

Consideremos las funciones diferencia

$$E_R(v) - E_C(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$t_R(v) - t_C(v) = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - t_0$$

$$l_R(v) - l_C(v) = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - l_0$$

Integramos y separamos las funciones diferencia de acuerdo con la propiedad de suma y resta de integrales indefinidas:

$$\int E_R(v)\,dv - \int E_C(v)\,dv = \int \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - \int mc^2\,dv - \int \frac{1}{2}mv^2\,dv$$

$$\int t_R(v)\,dv - \int t_C(v)\,dv = \int \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - \int t_0\,dv$$

$$\int l_R(v)\,dv - \int l_C(v)\,dv = \int \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - \int l_0\,dv$$

Se obtienen las integrales de los polinomios e acuerdo con la regla de la potencia.

$$\int E_R(v)\,dv - \int E_C(v)\,dv = mc^2 \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - vmc^2 - \frac{1}{6}mv^3$$

$$\int t_R(v)\,dv - \int t_C(v)\,dv = t_0 \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - vt_0$$

$$\int l_R(v)\,dv - \int l_C(v)\,dv = l_0 \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv - vl_0$$

Se realiza un cambio de variable para integrar la expresión: $\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv$ con una $u = \frac{v}{c}$, donde $du = \frac{1}{c}dv$.

Por lo que, tras sustituir el diferencial, la integral es: $c\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$. Integral que se realiza a través de una sustitución trigonométrica donde: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}(x) + C$, por lo tanto la expresión queda como

$c\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = c\sin^{-1}u$, donde al sustituir $u = \frac{v}{c}$, la integral se resuelve: $\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv = c\sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) + C$. Al sustituir esta solución en las integrales diferencia se obtiene que:

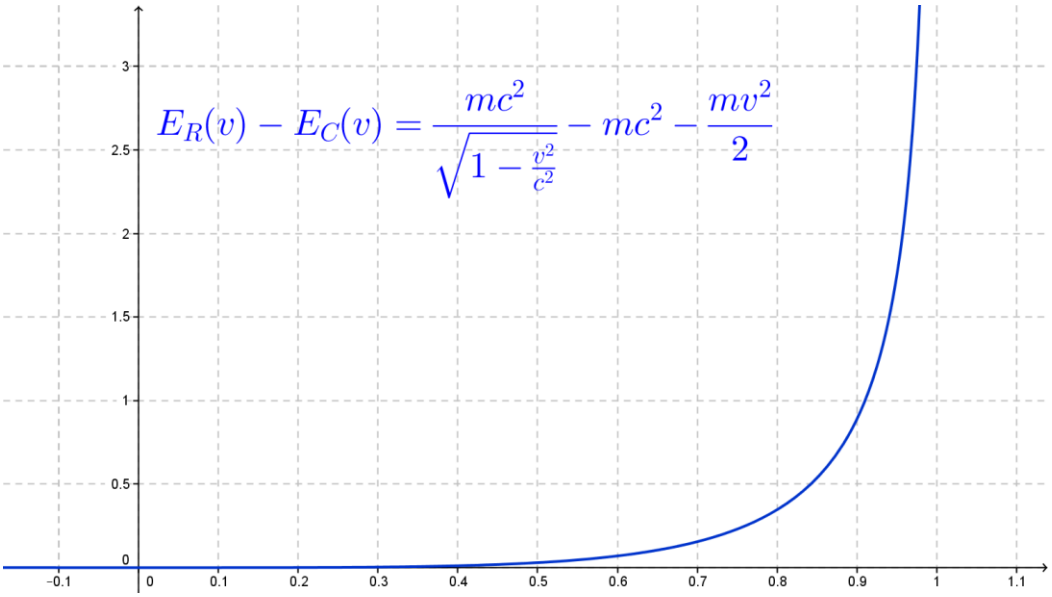
$$\int E_R\,(v)\,dv - \int E_C(v)\,dv\; = mc^3\sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - \; vmc^2\; - \frac{1}{6}mv^3$$

$$\int t_R\,(v)\,dv - \int t_C(v)\,dv = ct_0\sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - \; vt_0$$

$$\int l_R\,(v)\,dv - \int l_C(v)\,dv = cl_0\sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vl_0$$

ANEXO 4. ESBOZO DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DIFERENCIA PARA LA ENERGÍA CINÉTICA

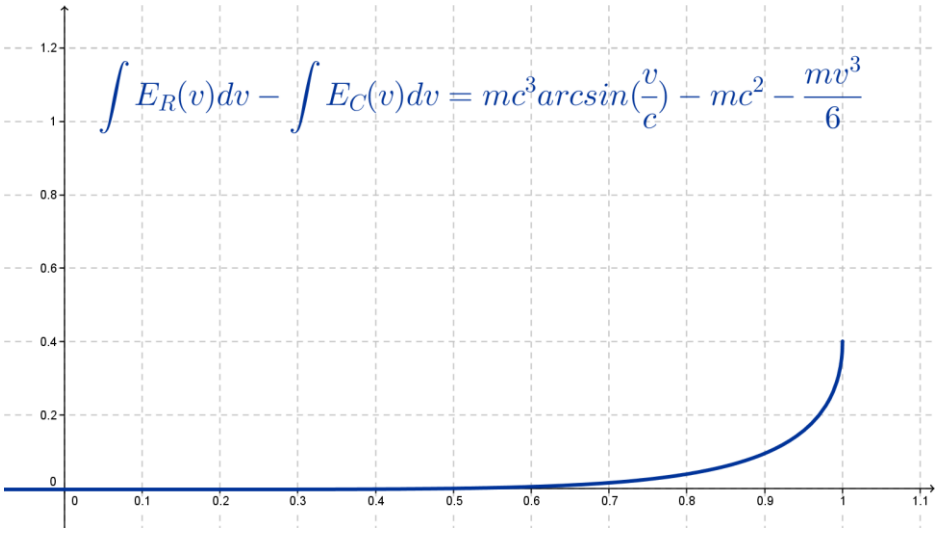
Gráfica 4.1. Esbozo de la Gráfica de la Función Diferencia para la Energía Cinética



A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esboza la función diferencia para la energía cinética cuando se toman en cuenta los efectos relativistas ($E_R(v)$) y cuando no se toman en cuenta ($E_C(v)$). El eje x cuantifica la velocidad y el eje *y* la cantidad de energía cinética. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

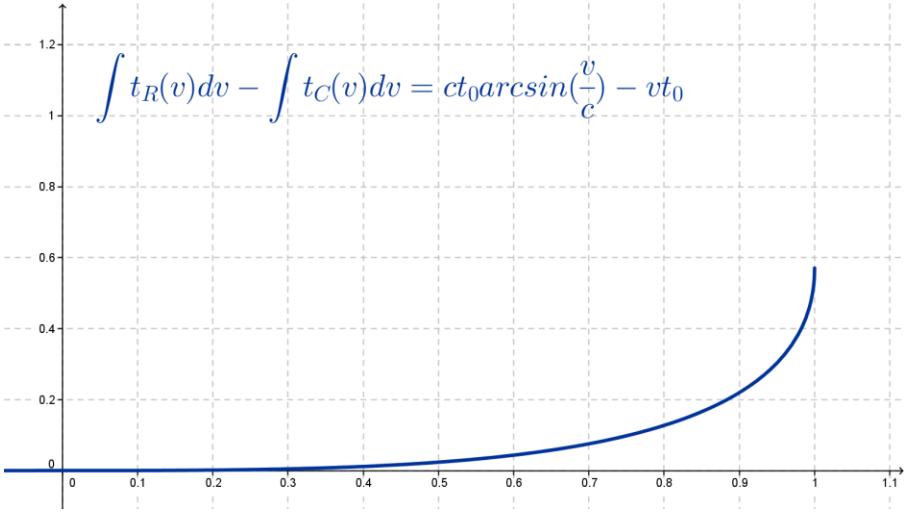
ANEXO 5. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES DIFERENCIA INTEGRALES

Gráfica 5.1. Esbozo de la gráfica de la Función Diferencia Integral Para la Energía Cinética



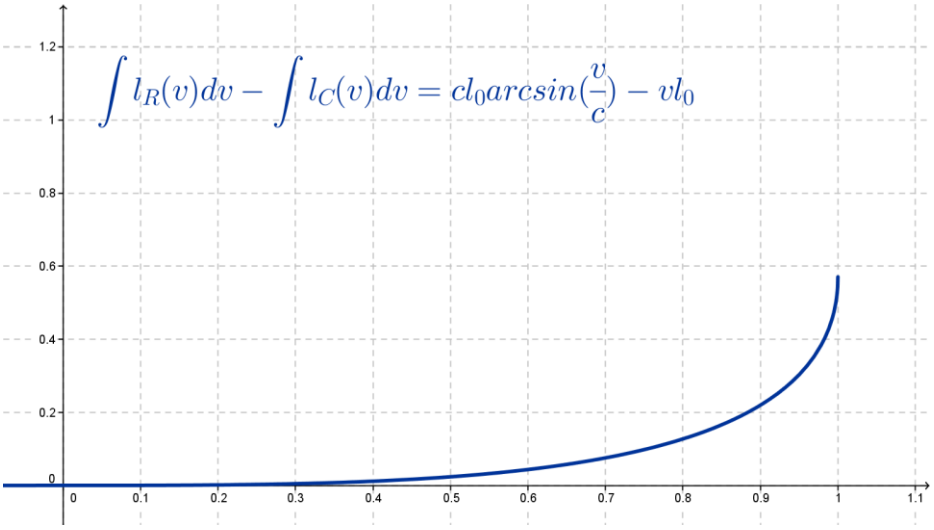
A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esboza la función diferencia integral para la energía cinética cuando se toman en cuenta los efectos relativistas y cuando no se toman en cuenta $\int E_R(v)\,dv - \int E_C(v)\,dv = mc^3 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - mc^2 v - \frac{1}{6}mv^3$. El eje x cuantifica la velocidad y el eje y la cantidad de energía cinética. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

Gráfica 5.2. Esbozo de la gráfica de la Función Diferencia Integral para la dilatación temporal



A través del graficador GeoGebra 4.2 se esboza la función diferencia integral para la dilatación temporal cuando se toman en cuenta los efectos relativistas y cuando no se toman en cuenta $\int t_R(v)\,dv - \int t_C\,(v)dv = ct_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vt$. El eje x cuantifica la velocidad y el eje y la cantidad dilatación temporal. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.

Gráfica 5.3. Esbozo de la gráfica de la Función Diferencia Integral para la dilatación temporal



A través del graficador *GeoGebra 4.2* se esboza la función diferencia integral para la expansión longitudinal cuando se toman en cuenta los efectos relativistas y cuando no se toman en cuenta $\int l_R(v)\, dv - \int l_C\,(v) dv = cl_0 \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) - vl$. El eje x cuantifica la velocidad y el eje y la cantidad dilatación temporal. Para el esbozo de las gráficas se toman como unitarios los valores de masa y velocidad de la luz.