LA PHICUENCIA MUSICAL:

ENCONTRANDO PHI EN LAS

PROGRESIONES MUSICALES

CIN2012A50153

ESCUELA:

TOMÁS ALVA EDISON

INTEGRANTES:

ADRIANA CASTILLA HERNÁNDEZ

SERGIO XAVIER ARELLANO CERVANTES

DANIEL ANDRÉS GIFFORD HERRERA

ASESOR:

ING. EDUARDO CHÁVEZ HERNÁNDEZ

ÁREAS DE CONVERGENCIA

DISCIPLINA: ARTE

DISCIPLINA DE APOYO: MATEMÁTICAS

INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

MÉXICO D.F 11 DE FEBRERO DE 2013

Los humanos a veces no nos damos cuenta de los procesos que nuestra mente realiza. Al escuchar música, existe un fenómeno en el cual nuestra mente espera escuchar cierta nota después de una progresión específica. No existen explicaciones concretas de por qué sucede esto y por eso nos ha interesado tanto el tema. Es posible que la explicación de este fenómeno tenga con ver con lo que sucede matemáticamente en el sistema musical. Fuera del ámbito de la música, existe un número llamado número de oro o proporción phi. Éste es usado en el arte y en la geometría pues los humanos tendemos a buscar esta proporción visualmente ya que nos resulta armonioso un objeto en el cual las encontremos. Esto no es mera casualidad, pues también se encuentra en la naturaleza y en todo lo que nos rodea. Pensando en esto, decidimos buscarla en las progresiones musicales para explicar la existencia de las notas de tendencia, las notas que esperamos escuchar. Para esto, veremos la música en números, que en este caso serán las frecuencias de los sonidos. Lo que esperamos encontrar es que de alguna forma la relación entre las frecuencias de las progresiones y la nota esperada nos remita a phi. También es posible que esto no necesariamente suceda, y que la explicación tenga que ver con otra relación matemática especial.

As humans, sometimes we are not aware of the processes that our mind performs. In music, there is a phenomenon in which our mind expects to hear a certain note after a specific progression. There are no clear explanations as to why this happen and that is precisely the reason the subject has appealed to us. It is possible that the explanation to this phenomenon has to do with the mathematical basis of music. Independent of the music world, there is a number called the golden ratio or phi. This is used in art and geometry, because humans tend to search for it visually due to the harmonious effect it has. This is not a coincidence; this proportion is found everywhere around us, especially in nature. With this in mind, we have decided to search for the golden ratio in the musical progressions to explain the existence of tendency notes. For this, we will study music by numbers, which in this case would be focused on the frequencies of sounds. What we hope to find is that in one way or another the relationship between the frequencies of the progressions and the expected note brings us close to the golden ratio. It is also possible that this is not the case, and the explanation has to do with other mathematical relationship.

INTRODUCCIÓN

La mente humana es un sistema muy complejo que concatena diversos procesos, incluso cuando pareciera que éstos no se relacionan entre sí. La percepción que tenemos del mundo depende en parte de nuestras experiencias, pero también existe una parte que es innata. A pesar de que nosotros no nos demos cuenta, nuestro cerebro identifica que existen ciertos patrones en los fenómenos del universo que parecen repetirse con mucha frecuencia. Existe un fenómeno en la música en el cual el cerebro espera escuchar ciertos cambios o ciertas notas después de una secuencia en particular. Si se toca una nota equivocada, el cerebro lo percibe como erróneo y le parece disonante, a pesar de que dicha nota suene bien en otro esquema. En la teoría musical esto es entendible puesto que se conocen las notas que son más propensas a surgir en una determinada escala o en una sucesión, pero queda la incógnita de por qué aún las personas que no saben nada de música detectan estos cambios y de por qué la teoría musical funciona en primer lugar. Lo que proponemos, es que esta percepción de armonía está basada en un proceso mental inconsciente mediante el cual el cerebro detecta ciertas relaciones en las frecuencias de los sonidos.

Si tomamos en cuenta que se ha encontrado que la proporción especial "phi" es común en otros fenómenos que nos parecen armoniosos, entonces es probable que se encuentre esta proporción también en la música. Dicha proporción se podría encontrar en las frecuencias de las notas, ya que todas están relacionadas entre sí y forman configuraciones especiales.

La importancia de esta investigación es que podría ayudar a dilucidar varias incógnitas sobre la naturaleza de la armonía musical y presentaría una faceta aún desconocida de la percepción del sonido. Al extrapolar los conocimientos que se tienen sobre otros fenómenos visuales y espaciales al ámbito del sonido, una característica especial de la mente quedaría fuertemente sugerida: la mente detecta ciertos patrones en el sonido de manera inconsciente. También trae al primer plano una forma matemática de analizar la música no muy explorada, que es a través de la frecuencia. Se le da un papel de importancia a esta última, porque de hecho sí funge un papel determinante en lo que son las relaciones entre notas. Ante todo es una valoración holística de los componentes de la música y de los principios de armonía

Los objetivos generales de nuestro trabajo son varios. Primero, encontrar una explicación a este fenómeno musical a través de las matemáticas. Determinar la importancia que tiene la frecuencia de las notas en la música. Encontrar la relación, en caso de haberla, entre phi y la música. Los objetivos específicos son: entender la interacción entre la escala mayor diatónica y la frecuencia del sonido, especialmente en su interacción con phi; buscar la relación phi en piezas de música en particular; buscar otras relaciones de frecuencia en diferentes piezas musicales.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para llevar a cabo esta investigación, primero tendremos que ampliar nuestros conocimientos sobre dos temas principales: la teoría musical y las matemáticas relacionadas con ésta. De estos dos temas tan extensos sólo es posible enfocarnos en una pequeña parte de ellos: de teoría musical nos enfocaremos en cómo funcionan las armonías, las escalas y las notas de "tendencia"; de matemáticas nos enfocaremos en cómo funcionan las series, en especial la serie de Fibonacci y su relación con la proporción de Phi.

Primero, veremos exactamente lo que es el sonido y como nace la música a partir de éste. El sonido es una vibración que se propaga por el aire. El número de veces que estas vibraciones u ondas hacen un ciclo completo en un segundo es conocido como frecuencia, y se mide en *Hertzios* (Hz). Todos los sonidos tienen una determinada frecuencia que determina que tan agudos o graves son; entre más alta la frecuencia, más agudo será el sonido y viceversa.

La música nace de ordenar estos sonidos, asignando frecuencias a notas determinadas. La escala musical que sentó las bases para la escala actual es la pitagórica, que fue aportada por el antiguo matemático griego Pitágoras y está basada en un complicado sistema de potencias que van determinando el valor de las notas. Este sistema de afinación, a pesar de ser muy exacto, presentaba algunas limitaciones en cuanto a la afinación y creación de armonías. Es así como nace la escala temperada, que resulta de hacer ciertos ajustes a la escala pitagórica para hacer posible una distribución de notas y afinaciones más estables.

La base de la escala temperada, que es la utilizada actualmente, es escala mayor diatónica. Esta escala nace de una cierta combinación de intervalos entre notas. Un tono es un intervalo cuya distancia es de dos notas, es decir, que desde la primera nota se cuentan dos lugares, quedando una nota en medio. Un semitono es la distancia de una nota con la que le sigue inmediatamente; en este caso no hay ninguna nota en medio. Por lo tanto puede decir que la distancia de un tono es igual a la de dos semitonos. La escala mayor diatónica surge de organizar las notas en un patrón de tonos y semitonos, de tal forma que se elige la primera nota, sea cual sea, y se va contando un tono o un semitono según el caso. El patrón es tono-tono-semitono-tono-tono-tono-semitono para dar un total de 7 notas con 5 intervalos de tono y 2 de semitono.

En esta escala temperada existen notas conocidas como "notas tendencia". Estas notas y acordes tienen una tendencia a ser seguidas por otras notas que disuelven la tensión creada, de forma tal que se dice que una cierta nota se "resuelve" en otra. Este fenómeno es un poco complicado y se debe a la posición que las notas ocupan en la escala. La tendencia que tiene un acorde hacia otro, es resultado de la suma de las tendencias de sus notas hacia otras notas. Dos notas tienen una tendencia entre sí cuanto más cerca estén; la máxima tendencia es cuando las dos notas están a un semitono de distancia. Si un acorde "x" tiene 4 notas y una de ellas está a un semitono de la nota de otro acorde "y", entonces el acorde "x" presenta una tendencia hacia el acorde "y". Si el acorde tiene dos notas que están a un semitono de las notas de otro acorde, entonces la tendencia es aún mayor. Si a esto le agregamos que estos acordes tienen una tercera nota en común, entonces nos encontramos con un caso de tendencia máxima. En una pieza musical se organizan acordes que tengan una tendencia con el siguiente para así formar una secuencia que terminaría por resolverse en el último acorde; que sería el que se espera escuchar. El hecho de que en la armonía (o en la progresión de acordes) se junten varias notas, hace que en ésta el fenómeno de la tendencia sea más claro que en la melodía donde las notas se tocan de forma separada. Este fenómeno de la tendencia aplica tanto para la escala mayor como para las demás escalas que surgen de ésta, como son la escala menor y los modos griegos. Estas escalas comparten la misma distribución de intervalos pero empiezan desde una nota distinta, lo que les da una coloración musical diferente pero sin perder las propiedades armónicas de la escala mayor. El hecho de que todas compartan la misma distribución de intervalos hace que sean llamadas Escalas Diatónicas, en referencia a los dos semitonos que todas comparten.

A pesar de que las escalas musicales son el sistema que ordena los sonidos en notas, los valores que éstas toman cambian de acuerdo al estándar de frecuencia que se esté usando. Es decir, usando el mismo sistema sus valores van a cambiar de acuerdo al valor inicial que tomemos como referencia; para este valor de referencia, conocido como Diapasón, generalmente se usa la nota La4. A esta nota se le asigna una frecuencia en particular que va a determinar el valor de las demás. A través del tiempo se le han otorgado distintos valores a esta nota de forma tal que la frecuencia de La4=432 Hz fue el estándar para la música occidental hasta 1955, cuando la organización internacional de estandarización estableció el valor de La=440 Hz; valor que se ha mantenido hasta el día de hoy.

Además de estos dos valores, existe otro valor que no se usa en la práctica pero que es relevante para la investigación. Este valor es el de La=430.539 Hz, el cual realmente no tiene su énfasis en el valor de La sino en el valor de las notas Do. Cuando La4=430.539 Hz los valores de Do son números enteros, por ejemplo, usando este estándar obtenemos el valor de Do4=256 Hz; cosa que no pasa con los otros dos valores estándar de La4. Por esta razón La=430.539 Hz es conocido como el Diapasón "Preciso" y es el más apto para buscar relaciones numéricas entre las notas.

El número de oro (phi) se ha encontrado en la historia en las proporciones geométricas de las cosas. Éste número es muy importante por varias razones y los humanos lo buscamos inconscientemente, pues las proporciones creadas con este número nos resultan armoniosas. El número phi Φ satisface la ecuación $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, lo que implica que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$... El número de oro está muy ligado con las serie de Fibonacci, ya que la razón entre los números de la serie tiende a phi. Antes de explicar esto es importante aclarar lo que es la serie de Fibonacci. En esta serie la suma del número que se tiene y el número anterior dan el número que sigue. Para verlo más claro se puede usar la fórmula $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, con $F_1 = F_2 = 1$. Entonces la serie se vería así: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89… Ahora que se ha explicado lo que son los números Fibonacci veremos a fondo su relación con la proporción de Φ. Al tomar dos números sucesivos de la serie y ver la razón entre ellos veremos que entre más aumentan los números, más se acerca la razón al valor de Φ = 1.618034. Veremos esto en ejemplos. Si tomamos 8 y 13 su razón es $\frac{13}{8} = 1.625$, si tomamos 34 y 21 su razón es $\frac{34}{21} = 1.61905$ y si tomamos 89 y 55 su razón es $\frac{89}{55} = 1.61818$. Con estos tres ejemplos podemos ver cómo su razón se va acercando más y más a 1.618034, aunque nunca llegará a ser este valor. Entonces se podría decir que el $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right) = \Phi$.

Ahora lo que haremos será ver cómo se encuentra una fórmula para cualquier número Fibonacci usando phi. Esto nos podría servir si, al estar buscando la nota de tendencia en una progresión musical, queremos ver si esa nota se encuentra de algún modo ligada a la serie de Fibonacci. Para esto nos basaremos en el procedimiento que se encuentra en el libro de *Combinatoria para olimpiadas* de Pablo Soberón Bravo. En este lo primero que se hace es usar la función generatriz de los Fibonacci que es:

$$f(x) = 0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \ldots$$
$$x\,f(x) = 0 + 0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \ldots$$
$$x^2\,f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + F_1x^3 + \ldots$$

Entonces de estas funciones podemos ver que:

$$(1 - x - x^2)f(x) = 0 + F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \ldots$$

En esto vemos que al restarlos, siguiendo la regla inicial de que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ y que $F_1 = F_2$, todo se cancela excepto el primer término de F_1x. Por ejemplo, $F_3 - F_2 - F_1 = 0$ porque $F_3 = F_2 + F_1$. Con el siguiente término ocurre lo mismo: $F_4 - F_3 - F_2 = 0$ porque $F_4 = F_3 + F_2$. Y así ocurre con todos los que siguen. Entonces lo que nos queda después de la resta es:

$$(1 - x - x^2)f(x) = 0 + F_1x$$

Tomando en cuenta que $F_1 = 1$, esto puede ser reescrito como:

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}$$

Ahora veremos cuáles son las raíces de $x^2 + x - 1$, usando la fórmula general:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Estas dos raíces se parecen mucho a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De hecho $x_2 = -\Phi$. Ahora veremos la representación de x_1 en Φ. Para esto nos fijaremos en un reacomodo de la fórmula de $x^2 + x - 1$:

$$x^2 + x = 1$$

$$x(x+1) = 1$$

a. $\mathbf{1 + x = \frac{1}{x}}$

$$x - \frac{1}{x} = -x$$

b. $\mathbf{x + (-\frac{1}{x}) = \frac{1}{(-\frac{1}{x})}}$

Con esto vemos que si x satisface la ecuación en el inciso a, entonces $-\frac{1}{x}$ también la satisface (inciso b) porque es de la misma forma. Ahora que ya sabemos que $-\Phi$ satisface la ecuación, entonces también sabemos que $-\frac{1}{-\Phi}$ la satisface y esto también se puede ver así $\frac{1}{\Phi}$. Entonces nuestra ecuación factorizada representada en fracciones parciales es la siguiente:

$$f(x) = \frac{-x}{(x+\Phi)(\mathrm{x} - \frac{1}{\Phi})} = \frac{A}{(x+\Phi)} + \frac{B}{(\mathrm{x} - \frac{1}{\Phi})}$$

Donde,

$$-x = A\left(x - \frac{1}{\Phi}\right) + B(x+\Phi) = Ax - \frac{A}{\Phi} + Bx + B\Phi = (A+B)x + (\frac{B\Phi^2 - A}{\Phi})$$

Entonces

$$A + B = -1, \qquad B\Phi^2 - A = 0$$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones vemos cómo:

$$A = \frac{-\Phi^2}{1+\Phi^2} = \frac{-\Phi^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-\Phi^2}{\Phi\sqrt{5}} = \frac{-\Phi}{\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{-1}{1+\Phi^2} = \frac{-1}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1}{\Phi\sqrt{5}}$$

Con esto,

$$f(x) = \frac{-\Phi}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x+\Phi}\right) + \frac{-1}{\Phi\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\mathrm{x} - \frac{1}{\Phi}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\Phi}{x+\Phi}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\mathrm{x}\Phi - 1}\right)$$

$$f(x)=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{x+\Phi}{\Phi}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-\mathrm{x}\Phi+1}\right)=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-(\frac{-1}{\Phi})x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-\mathrm{x}\Phi+1}\right)$$

Para entender el siguiente paso primero es muy importante aclarar qué son las funciones generatrices. Éstas son meramente transformaciones compactas de secuencias. La que veremos ahora es la función de la suma infinita de potencias. $f(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots$ Multiplicamos por x:

$$x\,f(x)=x+x^2+x^3+x^4\ldots=f(x)-1.$$

Despejamos

$$x\,f(x)-f(x)=-1$$

Factorizamos

$$f(x)(x-1)=-1$$

Despejamos otra vez

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{-x+1}.$$

Si sustituimos el coeficiente de la x por cualquier otro valor y lo igualamos junto con la x a un solo valor podemos ver que no afecta. Es decir, si la serie fuera $f(x)=1+ax+(ax)^2+(ax)^3+\ldots$, sólo tendríamos que igualar *ax* = *y* para tener la función inicial otra vez. Entonces nuestra función generatriz sería $f(x)=\frac{1}{1-ax}$.

Ahora que ya conocemos las funciones generatrices podemos distinguir que en esta función $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-(\frac{-1}{\Phi})x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-\mathrm{x}\Phi+1}\right)$, lo que se encuentra entre paréntesis son dos funciones generatrices $g(x)=\frac{1}{1-(\frac{-1}{\Phi})x}$, $h(x)=\frac{1}{1-\Phi\mathrm{x}}$. Si asociamos la función g(x) a la sucesión $(b_0,b_1,b_2,\ldots)$, vemos que $b_k=(\frac{-1}{\Phi})^k$ para todo k y si asociamos la función h(x) a la sucesión $(c_0,c_1,c_2,\ldots)$, vemos que $c_k=\Phi^k$ para todo k. Ahora sustituimos nuestras funciones generatrices en nuestra fórmula principal:

$$f(x)=\frac{-g(x)}{\sqrt{5}}+\frac{h(x)}{\sqrt{5}}=\frac{h(x)-g(x)}{\sqrt{5}}$$

Y $h(x) - g(x)$ es lo mismo que restarle el término n de $g(x)$ al término n de $h(x)$, porque las operaciones entre generatrices preservan las operaciones entre términos de las sucesiones. Y teniendo esto en mente podemos finalmente concluir con la fórmula de los números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (\frac{-1}{\Phi})^n}{\sqrt{5}}$$

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para encontrar la relación "phi" u otras relaciones relevantes, vamos a investigar las notas de las piezas musicales en cuanto a su frecuencia. Es decir, vamos a traducir cada nota a su valor en Hz (de acuerdo a su valor "preciso"). Las notas van a ser acomodadas en tablas de acuerdo al acorde en que se presenten, tanto para las piezas armónicas como para las melódicas. En el caso de los acordes, las notas que contiene cada acorde se van a acomodar en una fila. En el caso de las notas separadas, se van a acomodar en la fila del acorde en el cual aparecen. Para facilitar su estudio y por el hecho de que no altera la relación entre las notas, todas las piezas son estudiadas en la tonalidad de Do.

RESULTADOS OBTENIDOS

Escala armónica ascendente de Do Mayor:

Se analizó la escala de Do Mayor en cuanto a los acordes correspondientes a cada nota de manera ascendente. En cualquier escala Mayor se tiene un patrón de acordes que es Mayor-menor-menor-Mayor-Mayor-menor-disminuido. Una vez que se tabularon las notas que forman cada acorde (la primera, la tercera y la quinta), se tradujo a su valor en Hz de acuerdo al Diapasón preciso.

Después de un análisis extenso en busca de una proporción similar a "phi", se encontró una relación entre dos acordes cuyo valor es muy similar a éste. Al dividir la sumatoria de las frecuencias del acorde de Do Mayor (Octava) entre la sumatoria de Mi Menor, se encontró que el valor obtenido es 1.6178422…, que es muy cercano al valor de "phi". Cabe mencionar que la ligera discrepancia de valores se puede deber a que la escala temperada no es matemáticamente exacta como la pitagórica, y esto explicaría porque hay una marcada tendencia hacia phi sin llegar a ser el número exacto. Por otra parte, es importante mencionar que esto sólo sucede cuando el primer grado (o acorde) se divide entre el tercer grado que está inmediatamente debajo, y que es cierto para las demás claves como lo es para ésta. En otras palabras, la regla se podría reescribir así: "El cociente de la sumatoria (de las frecuencias) del primer acorde de una escala mayor, entre la sumatoria del tercero, tiende a ser phi."

Esta particularidad remite a la tendencia de armonizar que tiene la proporción de phi, ya que el tercer grado (o la tercera nota) de cada escala generalmente marca el matiz particular que la escala va a adoptar. Es decir, si la tercera es mayor, la escala va a tener un tinte de escala mayor a pesar de que sus demás notas no sean exactamente las de dicha escala; lo mismo aplica para la escala menor. Los modos griegos por ejemplo, que derivan de la escala mayor, se clasifican como mayores o menores de acuerdo a si su tercer nota es mayor o menor.

Escala armónica ascendiente de DO mayor (La4=430.539):

Acorde	DO mayor	RE menor	MI menor	FA mayor	SOL mayor	LA menor	SI dism.	DO mayor
1°	256	287.35	322.54	341.719	383.567	430.539	483.264	512
3°	322.54	341.719	383.567	430.539	483.264	512	547.01	645.08
5°	383.567	430.539	483.264	512	574.701	645.08	683.438	767.133
Suma			1189.37					**1924.213**

$$\frac{1924.213}{1189.371} = 1.617840 \ldots$$

El valor de esta división se mantiene como la tendencia para todas claves, aunque con pequeñas variaciones que obedecen a las diferencias de frecuencias. A continuación están los resultados de las claves de Mi Mayor, La Mayor y Re Mayor.

Escala armónica ascendente de MI mayor

Acorde	MI mayor	FA# menor	SOL# menor	LA mayor	SI mayor	DO# menor	RE# dism.	MI mayor
1°	322.54	341.719	322.54	430.539	483.264	542.445	608.874	645.08
3°	406.375	430.539	483.264	542.445	608.874	645.08	724.007	812.742
5°	483.264	683.438	608.874	645.08	724.007	812.742	861.078	966.527
Suma			1414.67					**2424.356**

$$\frac{2424.356}{1414.678} = 1.713715 \ldots$$

Escala armónica ascendente de LA♭ mayor

Acorde	LA♭ mayor	SI♭ menor	DO menor	RE♭ mayor	MI♭ mayor	FA menor	SOL dism.	LA♭ mayor
1°	403.375	341.719	512	542.445	608.874	683.438	767.133	812.749
3°	512	542.445	608.874	683.438	767.133	812.742	912.28	1024
5°	608.874	683.438	767.133	812.749	912.28	1024	1084.89	1217.75
Suma			1888.00					**3054.499**

$$\frac{3054.499}{1888.007} = 1.6178430 \ldots$$

Al encontrar estos valores que divididos se acercaban mucho a phi, decidimos usar la fórmula de los números de Fibonacci que se ve en el marco teórico: $F_n = \frac{\Phi^n - (\frac{-1}{\Phi})^n}{\sqrt{5}}$ para ver si alguna era parecido. Se obtuvo la tabla siguiente:

n	F_n
16	987
17	1597
18	2584
19	4181

En ésta se puede ver que los números Fibonacci no se parecían a los valores que fueron divididos, pues éstos son muy exactos y la división de la razón entre dos números puede acercarse a phi sin que ellos sean Fibonacci. Este procedimiento no brindo ningún resultado relevante.

La segunda particularidad que se detectó no está relacionada con la proporción phi y tiene que ver con un análisis de la escala mayor en conjunto. Existe una peculiaridad que observa al sacar en Hz la sumatoria total de los acordes de una escala diatónica, y dividirla entre el promedio total de dichas frecuencias. El resultado de esta división es exactamente veinticuatro. Este resultado es sorprendente por tres razones:

Tanto la sumatoria como el promedio son números con tres o más decimales, lo que hace sorprendente que su división tenga como resultado un número entero como veinticuatro. Además, veinticuatro es el doble de notas que comprenden a la escala temperada. Por último, este resultado es cierto para todas las escalas diatónicas sin importar la clave.

Esta particularidad posiblemente tiene su fundamento en que la escala diatónica mayor (de la que se desprenden las demás) es un complicado sistema con bases matemáticas diseñado para armonizar sonidos entre sí. Desde esta perspectiva parece lógico que haya una relación entre el promedio de la frecuencia, la sumatoria total, y el número de notas. El hecho de que este resultado sea el mismo para todas las claves indica que no es una coincidencia, sino que es más bien una propiedad del sistema de organización de la escala. El cuadro ilustrativo indica esta relación:

Notas/ Acordes	DO MAYOR	Re menor	Mi menor	FA MAYOR	SOL MAYOR	La menor	Si disminuido	DO MAYOR (Octava)	Total
Primera	256	287.35	322.54	341.719	383.567	430.539	483.264	512	377.122375
Tercera	322.54	341.719	383.567	430.539	483.264	512	574.701	645.08	461.67625
Quinta	383.567	430.539	483.264	512	574.701	645.08	683.438	767.133	559.96525
Promedio	320.702333	353.2027	396.457	428.086	480.510667	529.20633	580.46767	641.4043333	466.254625
Sumatoria	962.107	1059.608	1189.37	1284.258	1441.532	1587.619	1741.403	1924.213	11190.111

$$\frac{11190.111}{466.254625} = 24$$

Este resultado es cierto para todas las tonalidades. En algunos casos va a ser veinticuatro exacto, mientras que en otros va a ser un valor extremadamente cercano que para cualquier efecto práctico no hace ninguna diferencia.

Escala armónica ascendente de MI Mayor									
La4=430.539									
Notas/ Acordes	Mi MAYOR	Fa# menor	Sol# menor	LA MAYOR	SI MAYOR	Do# menor	Re# disminuido	MI MAYOR (Octava)	TOTAL
Primera	322.54	341.719	322.54	430.539	483.264	542.445	608.874	645.08	
Tercera	406.375	430.539	483.264	542.445	608.874	645.08	724.077	812.749	
Quinta	483.264	542.445	608.874	645.08	724.077	812.742	861.078	966.527	
Promedio	404.06	438.2343333	471.55933	539.3547	605.405	666.7557	731.343	808.1186667	583.1037917
Sumatoria	1212.18	1314.703	1414.678	1618.064	1816.215	2000.267	2194.029	2424.356	13994.491

$$\frac{13994.491}{583.1037917} = 23.999\ldots$$

Escala armónica ascendente de LAb Mayor									
La4=430.539									
Notas/ Acordes	LAb MAYOR	SIb menor	Do menor	REb MAYOR	MIb MAYOR	Fa menor	Sol disminuido	LAb MAYOR (Octava)	TOTAL
Primera	403.375	456.14	512	542.445	608.874	683.438	767.133	812.749	
Tercera	512	5420445	608.874	683.438	767.133	812.749	912.28	1024	
Quinta	608.874	683.438	767.133	812.749	912.28	1024	1084.89	1217.75	
Promedio	508.083	1807194.9	629.33567	679.544	762.76233	840.062333	921.434333	1018.166333	226569.2809
Sumatoria	1524.249	5421584.6	1888.007	2038.632	2288.287	2520.187	2764.303	3054.499	5437662.742

$$\frac{5437662.742}{226569.2809} = 24.0000000017\ldots$$

Escala armónica ascendente de RE Mayor									
Notas/ Acordes	RE MAYOR	Mi menor	Fa# menor	SOL MAYOR	La MAYOR	Si menor	Do# disminuido	DO MAYOR (Octava)	Total
Primera	287.35	322.54	362.039	383.567	430.539	483.264	542.445	574.701	423.305625
Tercera	362.039	383.567	430.539	483.264	542.445	574.701	645.08	724.007	518.20525
Quinta	430.539	483.264	542.445	574.701	645.08	724.077	767.133	821.078	623.539625
Promedio	359.976	396.457	445.00767	480.51067	539.35467	594.014	651.5526667	706.5953333	521.6835
Sumatoria	1079.928	1189.371	1335.023	1441.532	1618.064	1782.042	1954.658	2119.786	12520.404

$$\frac{12520.404}{521.6835} = 24$$

Primeros 4 compases del Preludio I (Clave bien Temperada) de Johann Sebastian Bach:

Esta obra de Bach es considerada una de las piezas insignes de la música barroca y se distingue por su composición armónica que explora las diferentes tonalidades y matices de la escala temperada. Esto la hace apta para el estudio de las relaciones de las notas y los acordes entre sí, particularmente para el fenómeno de la tendencia. Para simplificar su estudio y por ser un muy buen ejemplo del fenómeno musical que se busca, se estudiaron únicamente los primeros 4 compases de la obra. Estos cuatro compases son arpegios (acordes cuyas notas se tocan por separado) que cambian y se suceden entre sí con cada compás, así que por practicidad se han dispuesto sus notas como las de un acorde. Además de esto, resulta ser que los acordes están dispuestos de tal manera que se suceden entre sí en un orden natural, y cada uno tiene una tendencia para resolverse o avanzar al siguiente acorde en ese orden.

Parece ser que los acordes tienen notas tendencia que se encuentran en el siguiente acorde, dispuestas de una manera específica. Principalmente el segundo y el tercer acorde, donde la tendencia es muy clara, se nota esta relación. En ambos acordes las dos primeras notas pueden ser localizadas en el siguiente, dos lugares abajo. Esto pasa de Re menor 7 a Sol Mayor 7 y de Sol Mayor 7 a Do Mayor, porque estos dos acordes son los que presentan una tendencia a resolverse en el siguiente. Los otros dos acordes de Do Mayor no muestran esta correspondencia porque son el primer acorde de la escala, que es un punto donde los demás acordes de resuelven y no uno que se resuelva en otros. La relación es enteramente musical, siendo las frecuencias irrelevantes en este sentido y es una correspondencia que se da en todas las claves. La siguiente tabla representa la relación entre las notas:

Notas	DO mayor	RE menor	SOL mayor	DO mayor
1°	256	**287.35**	**383.567**	256
3°	322.54	**341.719**	**483.264**	322.54
5°	383.567	430.539	**287.35**	**383.567**
7°	483.264	256	**341.710**	**483.264**

Esta correspondencia se explica porque musicalmente hablando los acordes son afines entre sí y mantienen una relación muy fuerte y armoniosa al ser tocados juntos en ese orden. La particular distribución de las notas es una muestra de una red de tendencia.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos son muestra de dos cosas. En primer lugar, muestran que phi efectivamente está relacionada con la música a nivel de las frecuencias de las notas. El hecho de que la relación se encontrara haciendo una división del primer acorde de la escala entre el tercero, se debe a la importancia especial que tienen estos dos grados a nivel armónico. El primer acorde es el más importante y funciona como el punto de referencia para los demás, mientras que el tercero establece el matiz, coloración o sonido particular que va a producir la escala. Siendo la base de la armonización en un sistema musical, resulta lógico que exista una correspondencia con phi a este nivel. Además de esto, el haber encontrado phi al hacer una división también sugiere una correlación con la serie de Fibonacci, ya que los números que componen a esta serie matemática tienen como límite phi al dividirse entre sí mismos. El resultado arroja un ejemplo sorprendente de cómo phi tiende a aparecerse justo donde existe una relación armoniosa.

Por otro lado el resultado obtenido al dividir los datos más relevantes de la escala mayor, es decir, la sumatoria total y el promedio de las frecuencias, es otro indicador de cómo la armonía musical funciona también a un nivel subyacente, no siempre perceptible. Cuando se obtienen los valores completos de las frecuencias en la escala mayor en distintas claves, se encuentra que el número 24 es una constante. Esto implica que la enorme cantidad de escalas que derivan de esta, están regidas también por este número. De esta forma es que el número 24 cobra una relevancia mucho mayor, porque su influencia se encuentra prácticamente en toda la música basada en el sistema musical moderno. Cuando el cerebro espera escuchar una nota o un acorde determinado después de otro, a nivel subconsciente está buscando estas relaciones de frecuencias que están regidas por el número 24. Un cerebro sin educación musical también espera escuchar ciertas notas en nuestro sistema musical, porque busca la relación matemática de las frecuencias en concordancia con este número.

Los sorprendentes resultados explican cómo funciona la relación de la música con las frecuencias del sonido, y cómo el cerebro humano interactúa con ella. Exponen incógnitas que invitan a una mayor investigación sobre el tema, pero sobre todo despliegan una valiosa aportación sobre la naturaleza del sonido, la armonización musical que hemos desarrollado, y la mente humana.

BIBLIOGRAFÍA

Ashton, A. (2003). *Harmonograph: A visual Guide to the Mathematics of Music.* Nueva York: Walker Publishing Company

Beall, S. (2000). *Functional Melodies: Finding Mathematical Relationships in Music.* Boston: Key Curriculum Press

Buide, B. (2006). "La escala de los armónicos" en *Relafare*. Recuperado el 7 de febrero de 2013 de http://www.relafare.eu/pdf_articulos/08_escalaarmonicos.pdf.

García, V. (s/f). "Fundamentos del sonido" en *Universidad Complutense*. Recuperado el 6 de febrero de 2013 de http://www.ucm.es/info/Psyap/taller/sonido/

Music Novatory (2009). "Tendency Notes" en *Music Novatory*. Recuperado el 2 de diciembre de 2012 de http://www.musicnovatory.com/cqtendency.html

O'Connor, A. (2010). "Introduction to Phi" en *Nature's Word.* Recuperado el 2 de diciembre de 2012 de http://www.natures-word.com/sacred-geometry/phi-the-golden-proportion/introduction-to-phi-the-golden-proportion

Pierce, J. (1992). *The Science of Musical Sound.* Nueva York: Scientific American Books Inc.

Soberón, P. (2010). *Combinatoria para olimpiadas.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Stewart, I. (2004). *Math Hysteria: Fun and Games with Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.